
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Grundlagen	1
1.1	Ziele	1
1.2	Einführendes Beispiel: Berechnung der Fibonacci-Zahlen	2
1.2.1	Rekursive Berechnung	2
1.2.2	Iterative Berechnung	5
1.2.3	Berechnung mit Hilfe des iterierten Quadrierens	6
1.3	Grundlagen	10
1.3.1	Registermaschine (RAM)	10
1.3.2	Zeitkomplexität	13
1.3.3	Platzkomplexität	16
1.3.4	Beschreibungskomplexität	18
1.3.5	Landausche Symbole	18
1.4	Übungsaufgaben	22
2	Sortieren	25
2.1	Einfache Sortieralgorithmen	25
2.1.1	Vorbemerkungen	25
2.1.2	Sortieren durch Auswahl	26
2.1.3	Sortieren durch Einfügen	29
2.1.4	Verbessertes Sortieren durch Einfügen	31
2.2	Mergesort	32
2.2.1	Rekursiver Mergesort	32
2.2.2	Analyse des rekursiven Mergesort	34
2.2.3	Iterativer Mergesort	37
2.2.4	Analyse des iterativen Mergesort	37
2.3	Heapsort	39
2.3.1	Heaps und generischer Heapsort	39
2.3.2	Implementierung von Heaps	41
2.3.3	Standard-Heapsort	47
2.3.4	Analyse von Standard-Heapsort	48
2.3.5	Carlssons Variante von Heapsort	51
2.3.6	Bottom-Up-Heapsort	53
2.4	Quicksort	54
2.4.1	Allgemeines Verfahren	54

2.4.2	Worst-Case und Best-Case Analyse von Quicksort	57
2.4.3	Average-Case Analyse von Quicksort	58
2.4.4	Varianten von Quicksort	62
2.5	Interludium: Divide-and-Conquer-Algorithmen	64
2.5.1	Prinzip	64
2.5.2	Ansatz für eine allgemeine Analyse	64
2.5.3	Analyse eines Spezialfalles	66
2.5.4	Analyse für allgemeinere Fälle	67
2.6	Eine untere Schranke für das Sortieren	68
2.6.1	Entscheidungsbaum	69
2.6.2	Maximale Anzahl von Vergleichen	69
2.6.3	Mittlere Anzahl an Vergleichen	72
2.7	Bucketsort	74
2.7.1	Das Universum $[0 : N - 1]$	74
2.7.2	Das Universum $[0 : N - 1]^c$	75
2.7.3	Das Universum $[0 : N - 1]^*$	77
2.7.4	Hinweise zur Implementierung	79
2.8	Übungsaufgaben	79
3	Selektieren	83
3.1	Quickselect	83
3.1.1	Ein partitionierender Algorithmus	83
3.1.2	Analyse von Quickselect	84
3.2	Ein linearer Selektionsalgorithmus	86
3.2.1	Der BFPRT-Algorithmus	86
3.2.2	Analyse des BFPRT-Algorithmus	88
3.3	Der Spinnen-Algorithmus	91
3.3.1	Spinnen	91
3.3.2	Der Algorithmus	92
3.3.3	Analyse des Algorithmus	93
3.3.4	Die Spinnenfabrik	94
3.4	Eine untere Schranke	98
3.4.1	Ein Gegenspielerargument	98
3.5	Ein randomisierter Median-Algorithmus	100
3.5.1	Der Algorithmus	101
3.5.2	Ein wenig Wahrscheinlichkeitstheorie	101
3.5.3	Analyse des randomisierten Algorithmus	107
3.6	Neuere Ergebnisse	111
3.6.1	Algorithmen	111
3.6.2	Untere Schranken	111
3.7	Übungsaufgaben	112

4	Suchen	113
4.1	Wörterbücher	113
4.2	Ausnutzen von Sortierung	114
4.2.1	Lineare Suche	114
4.2.2	Binäre Suche	114
4.2.3	Exponentielle Suche	114
4.3	Hashing	115
4.3.1	Hashfunktionen	115
4.3.2	Hashing durch Verkettung	118
4.3.3	Linear Probing	120
4.3.4	Quadratic Probing	122
4.3.5	Double Hashing	123
4.3.6	Universelle Hashfunktionen	126
4.4	Binäre Suchbäume	128
4.4.1	Suchbaumeigenschaft	128
4.4.2	Suchen und Einfügen im binären Suchbaum	128
4.4.3	Löschen im binären Suchbaum	129
4.5	AVL-Bäume	131
4.5.1	Höhenbalancierung	131
4.5.2	Einfügen in einen AVL-Baum	133
4.5.3	Löschen im AVL-Baum	137
4.6	(a, b) -Bäume	139
4.6.1	Definition	139
4.6.2	Einfügen in einen (a, b) -Baum	141
4.6.3	Löschen im (a, b) -Baum	142
4.7	Weitere Varianten von Suchbäumen	143
4.7.1	Vielweg-Suchbäume	143
4.7.2	Balancierte Suchbäume	144
4.8	Tries	145
4.8.1	Einfügen und Löschen in Tries	145
4.8.2	Implementierung von Tries	146
4.9	Übungsaufgaben	148
5	Graphen	149
5.1	Grundlagen der Graphentheorie	149
5.1.1	Ungerichtete Graphen	149
5.1.2	Gerichtete Graphen	152
5.1.3	Repräsentationen von Graphen	156
5.2	Traversieren von Graphen	158
5.2.1	Tiefensuche (DFS)	158
5.2.2	Breitensuche (BFS)	161

5.2.3	Traversieren von Bäumen	164
5.3	Zusammenhang von Graphen	165
5.3.1	Ungerichtete Graphen	165
5.3.2	Gerichtete Graphen	165
5.4	Kürzeste Wege	170
5.4.1	Der Algorithmus von Floyd	171
5.4.2	Transitive Hülle von Graphen	174
5.4.3	Der Algorithmus von Dijkstra	178
5.4.4	Der Algorithmus von Dijkstra mit Priority Queues	181
5.5	Interludium: Fibonacci-Heaps	184
5.5.1	Aufbau eines Fibonacci-Heaps	184
5.5.2	Analyse von Fibonacci-Heaps	185
5.6	Minimale Spannbäume	191
5.6.1	Der Algorithmus von Prim	191
5.6.2	Der Algorithmus von Kruskal	195
5.7	Interludium: Union-Find-Datenstrukturen	197
5.7.1	Darstellung von Mengen durch Listen	197
5.7.2	Darstellung von Mengen durch Bäume	199
5.7.3	Pfadkompression	200
5.8	Übungsaufgaben	203
6	Texte	205
6.1	Alphabete und Zeichenketten	205
6.2	Der Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt	205
6.2.1	Die Idee	206
6.2.2	Analyse des Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt	207
6.2.3	Bestimmung eigentlicher Ränder	208
6.3	Der Algorithmus von Boyer und Moore	210
6.3.1	Die Idee	210
6.3.2	Bestimmung der Shift-Tabelle	213
6.3.3	Analyse des Algorithmus von Boyer und Moore	214
6.4	Tries für Texte	218
6.4.1	Suffix-Tries	219
6.4.2	Suffix-Bäume	222
6.4.3	Suchen mit Suffix-Bäumen	226
6.5	Interludium: Datenkompression	227
6.5.1	Eine untere Schranke	227
6.5.2	Huffman-Kodierung	228
6.5.3	Lempel-Ziv-77	232
6.5.4	Lempel-Ziv-78	233
6.5.5	Lempel-Ziv-Welch	234

6.5.6	Die Burrows-Wheeler-Transformation	235
6.6	Übungsaufgaben	237
7	Arithmetik	239
7.1	Euklidischer Algorithmus	239
7.1.1	Grundalgorithmus	239
7.1.2	Erweiterte Version	240
7.2	Modulare Arithmetik	242
7.2.1	Grundlagen	242
7.2.2	Modulare Gleichungen	245
7.2.3	Chinesischer Restsatz	245
7.2.4	Berechnung von Potenzen	247
7.3	Primzahlen	248
7.3.1	Elementare Ergebnisse	248
7.3.2	Primzahltests	251
7.4	Interludium: Kryptographie	255
7.4.1	Public-Key-Kryptographie	256
7.4.2	Das RSA-Verfahren	257
7.4.3	Sicherheit des RSA-Verfahrens	258
7.5	Die schnelle Fouriertransformation	259
7.5.1	Multiplikation von Polynomen	259
7.5.2	Eine alternative Methode zur Polynommultiplikation	260
7.5.3	Berechnung der Konvolution mittels FFT	261
7.6	Multiplikation ganzer Zahlen	265
7.6.1	Analyse der Schulmethode	265
7.6.2	Ein Divide-and-Conquer-Algorithmus	266
7.6.3	Analyse des Algorithmus von Karatsuba und Ofman	267
7.6.4	Verbesserung des Algorithmus von Karatsuba und Ofman	269
7.7	Optimale Klammerung von Matrizenprodukten	272
7.7.1	Einleitendes Beispiel	272
7.7.2	Anzahl verschiedener Klammerungen	272
7.7.3	Lösung mit dynamischer Programmierung	275
7.8	Matrizenmultiplikation	276
7.8.1	Der Algorithmus von Strassen	277
7.8.2	Analyse des Algorithmus von Strassen	278
7.8.3	Verbesserung des Algorithmus von Strassen	279
7.8.4	Weitere Entwicklungen	282
7.8.5	Invertierung von Matrizen	282
7.9	Übungsaufgaben	285

8 Schwierige Probleme	287
8.1 Unentscheidbarkeit	287
8.1.1 Entscheidungsprobleme	287
8.1.2 Abzählbarkeit	288
8.1.3 Gödelisierung	290
8.1.4 Universelle Registermaschinen	292
8.1.5 Unentscheidbare Probleme	294
8.1.6 Die Church-Turing These	296
8.2 \mathcal{NP} -Vollständigkeit	297
8.2.1 Die Klassen \mathcal{P} und \mathcal{NP}	297
8.2.2 Standard-Registermaschinen	299
8.2.3 Reduktionen	300
8.2.4 \mathcal{NP} -harte und \mathcal{NP} -vollständige Probleme	303
8.2.5 Erfüllbarkeitsproblem	304
8.2.6 Satz von Cook	305
8.2.7 Konjunktive Normalform und 3SAT	309
8.2.8 Beispiele \mathcal{NP} -vollständiger Probleme	311
8.3 Approximative Algorithmen	317
8.3.1 Optimierungsprobleme und Approximationen	318
8.3.2 Die Klassen \mathcal{NPO} und \mathcal{PO}	321
8.3.3 Die Klasse \mathcal{APX}	322
8.3.4 Die Klasse \mathcal{PTAS}	323
8.3.5 Die Klasse \mathcal{FPTAS}	325
8.4 Übungsaufgaben	331
A Literaturhinweise	333
A.1 Lehrbücher zur Algorithmik	333
A.2 Lehrbücher zu angrenzenden Themen	334
A.3 Originalarbeiten	335
B Gofer-Skripten	337
B.1 Berechnung von Fibonacci Zahlen	337
C Index	339