Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Tutoriumsblatt 3

Aufgabe 3-1 **(Nicht)deterministische endliche Automaten und reguläre Grammatiken**

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B\}$ und $\Sigma = \{1, 0\}$ sowie der Menge P der Produktionen:

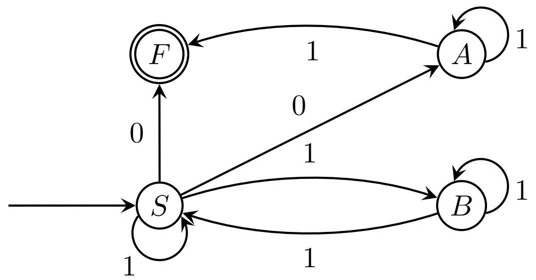
$$P = \{ \quad S \to 0 \mid 0A \mid 1S \mid 1B, \\ A \to 1 \mid 1A, \\ B \to 1S \mid 1B \quad \}$$

(Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe ist es vollkommen irrelevant, welche Sprache G beschreibt. Wer Freude daran hat, darf trotzdem überlegen :-))

a) Konstruieren Sie direkt aus G einen nichtdeterministischen endlichen Automaten N, der die Sprache $L(G)$ akzeptiert.

Lösungsvorschlag:

Es entsteht der Automat $N = (Z, \Sigma, \delta_N, S, \{F\})$ mit $Z = \{S, A, B, F\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$ sowie δ_N:



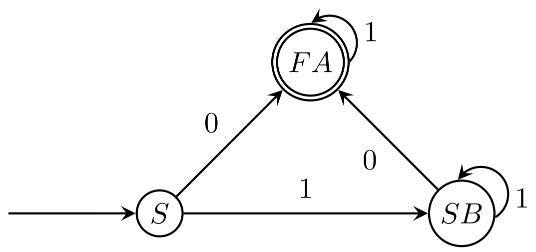
b) Konstruieren Sie nun aus Ihrem nichtdeterministischen einen deterministischen Automaten M, der ebenfalls $L(G)$ akzeptiert.

Lösungsvorschlag:

Offensichtlich ist der Zustand $\{S\}$ der Startzustand von M. Ausgehend vom Startzustand bestimmen wir für alle Eingabewörter die Menge der möglichen Folgezustände. Diese Mengen sind ebenfalls Zustände von M. Wir bestimmen für alle neuen Zustände die Mengen der Folgezustände für alle Wörter. So verfahren wir weiter, bis keine Zustände von M mehr dazu kommen.

	1	0
$\{S\}$	$\{S, B\}$	$\{F, A\}$
$\{S, B\}$	$\{S, B\}$	$\{F, A\}$
$\{F, A\}$	$\{F, A\}$	$\emptyset$

Damit ergibt sich der Automat $M = (Z, \Sigma, \delta_M, S, \{FA\})$ mit $Z = \{S, SB, FA\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$ sowie δ_M:



Aufgabe 3-2 Endliche Automaten

Jede natürliche Zahl hat eine Binärdarstellung als nichtleeres Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$:

Wort	System	Zahlwert	
1010	dezimal	$\mathbf{1}\cdot 10^3+\mathbf{0}\cdot 10^2+\mathbf{1}\cdot 10^1+\mathbf{0}\cdot 10^0 =$	tausendundzehn
1010	binär	$\mathbf{1}\cdot 2^3+\mathbf{0}\cdot 2^2+\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{0}\cdot 2^0 =$	zehn
1111110010	binär	$\mathbf{1}\cdot 2^9+\mathbf{1}\cdot 2^8+\mathbf{1}\cdot 2^7+\mathbf{1}\cdot 2^6+\mathbf{1}\cdot 2^5+\mathbf{1}\cdot 2^4+\mathbf{0}\cdot 2^3+\mathbf{0}\cdot 2^2+\mathbf{1}\cdot 2^1+\mathbf{0}\cdot 2^0 =$	tausendundzehn

Im Binärsystem gilt: hat ein Wort w den Zahlwert n, so hat das Wort $w0$ den Zahlwert $2n$ und das Wort $w1$ den Zahlwert $2n + 1$.

Demnach gilt: falls der Zahlwert eines Worts w durch 3 teilbar ist, dann ist der Zahlwert des Worts $w0$ auch durch 3 teilbar, und der Zahlwert des Worts $w1$ ist kongruent 1 modulo 3. Die entsprechenden Fälle, wenn der Zahlwert von w kongruent 1 oder 2 modulo 3 ist, kann man sich leicht überlegen.

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten M an, der genau die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen in Binärdarstellung akzeptiert. Führende Nullen sind erlaubt (brauchen also keine Sonderbehandlung), aber das leere Wort ist keine Binärdarstellung einer Zahl.

Lösungsvorschlag:

Vorüberlegungen:

Σ ist die Menge der Binärziffern $\{0, 1\}$
aber was soll durch die Zustände repräsentiert werden?

Erste Idee:

für jeden Zahlwert einen Zustand, Zustände für Dreierzahlen sind die Endzustände.
Aber der Zahlwert kann beliebig groß sein. Endlich viele Zustände reichen nicht.

Lösungsvorschlag:

Bessere Idee:

Ein Zustand repräsentiert den Rest, der übrigbleibt,
wenn der Zahlwert des bisherigen Worts durch 3 dividiert wird.
Dieser Rest kann nur 0 oder 1 oder 2 sein.

Wie verändert sich der Rest, wenn nach dem Wort eine weitere Ziffer kommt?

Wort	w	$w0$	$w1$
Zahlwert	n	$2n$	$2n+1$
Zahlwert mod 3	0	0	1
	1	2	0
	2	1	2

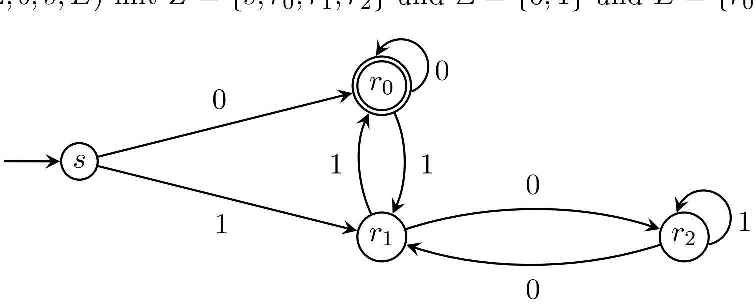
Zustände:

Nennen wir die Zustände r_0, r_1, r_2 für Rest $0, 1, 2$.
Endzustand ist offensichtlich r_0.
Startzustand könnte auch r_0 sein, aber dann würde auch das leere Wort akzeptiert.
Deshalb fügen wir einen eigenen Startzustand s hinzu.

Lösung:

$M = (Z, \Sigma, \delta, s, E)$ mit $Z = \{s, r_0, r_1, r_2\}$ und $\Sigma = \{0, 1\}$ und $E = \{r_0\}$ und

δ:



Beispiele:

Zahlwert 6:	$(s, 110)$	$\vdash$	$(r_1, 10)$	$\vdash$	$(r_0, 0)$	$\vdash$	(r_0, ε)	akzeptiert
Zahlwert 7:	$(s, 111)$	$\vdash$	$(r_1, 11)$	$\vdash$	$(r_0, 1)$	$\vdash$	(r_1, ε)	nicht akzeptiert

Aufgabe 3-3 Endliche Automaten

Sei L die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, die aba als Teilwort enthalten. Konstruieren Sie einen deterministischen erkennenden Automaten M für L.

Lösungsvorschlag:

$M = (Z, \Sigma, \delta, Z_0, \{Z_3\})$
$Z = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\}$
$\Sigma = \{a, b\}$
δ wird durch folgende Tabelle angegeben (und kann zur Übung in einen Graph übertragen werden):

	Z_0	Z_1	Z_2	Z_3
a	Z_1	Z_1	Z_3	Z_3
b	Z_0	Z_2	Z_0	Z_3