Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Tutoriumsblatt 10

Aufgabe 10-1 Reduktion von formalen Sprachen: Eine Trockenübung I

Seien die formalen Sprachen A, $B \subset \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ definiert durch:

$$A = \{\ \omega \in \Sigma^* \mid |\omega_a| = |\omega_b| = |\omega_c|\ \}$$
$$B = \{\ a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\ \}$$

Dabei ist $|\omega_a|$ die Anzahl der as in ω.

Zeigen Sie: $A \leq B$.

Lösungsvorschlag:

Sei

$$\begin{aligned} f : \Sigma^* &\to \Sigma^* \\ \omega &\mapsto abc\ a^{||\omega_a|-|\omega_b||} b^{||\omega_b|-|\omega_c||} \end{aligned}$$

f ist (offensichtlich) total und berechenbar.
Zu zeigen: $\omega \in A \Leftrightarrow f(\omega) \in B$

$$\begin{aligned} \omega \in A &\Leftrightarrow |\omega_a| = |\omega_b| = |\omega_c| \\ &\Leftrightarrow |\omega_a| - |\omega_b| = 0 \ \wedge\ |\omega_b| - |\omega_c| = 0 \\ &\Leftrightarrow f(\omega) \in B \end{aligned}$$

Aufgabe 10-2 allgemeines und spezielles Halteproblem

Das allgemeine Halteproblem ist gegeben durch:

$$H = \{\ \omega\#x \mid M_\omega\ angesetzt\ auf\ x\ hält\ \}$$

Das spezielle Halteproblem ist gegeben durch:

$$K = \{\ \omega \mid M_\omega\ angesetzt\ auf\ \omega\ hält\ \}$$

Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar. Zeigen Sie, dass das allgemeine Halteproblem nicht entscheidbar ist.

Lösungsvorschlag:

Wir müssen natürlich nur zeigen, dass $K \leq H$ gilt. (Wenn H dann entscheidbar mit χ_H wäre und $f(x) \in H \Leftrightarrow x \in K$ für eine Funktion f gelten würde, dann könnte man K mit $\chi_H(f(x))$ entscheiden.)
Es sei $K \subset \Sigma^*$ und $H \subset \Gamma^*$. Wähle:

$$\begin{aligned} f:\ \Sigma^* &\rightarrow \Gamma^* \\ \omega &\mapsto \omega\#\omega \end{aligned}$$

f ist (offensichtlich) total und berechenbar.
Wir müssen noch für alle $\omega \in \Sigma^*$ zeigen, dass $f(\omega) \in H \Leftrightarrow \omega \in K$.

'$\Rightarrow$' Sei $\nu = f(\omega) \in H$. Dann ist ν von der Form $\nu = \omega\#\omega$.
Da $\nu \in H$, hält M_ω auf ω. Also ist $\omega \in K$.

'$\Leftarrow$' Sei $\omega \in K$. Dann hält M_ω auf ω. Dann ist $f(\omega) = \omega\#\omega \in H$.

Aufgabe 10-3 Reduktion, akzeptiere Sprache

Betrachte die Sprachen

$$\overline{H_0} := \{\omega \mid M_\omega \text{ angesetzt auf das leere Band hält nicht}\}$$
$$H_{nie} := \{\omega \mid M_\omega \text{ hält für keine Eingabe}\}$$

Über einem geeigneten Alphabet Σ

a) Sei $\alpha \in H_{nie}$. Welche Sprache akzeptiert M_α ?

Lösungsvorschlag:

$$L(M_\alpha) = \emptyset$$

b) Reduzieren Sie $\overline{H_0}$ auf H_{nie}

Lösungsvorschlag:

Wir suchen eine total berechenbare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \Sigma^* &\to \Sigma^* \\ \omega &\mapsto f(\omega) \end{aligned}$$

Mit $f(\omega) \in H_{nie} \Leftrightarrow \omega \in \overline{H_0}$.

Überlegung: *Wie muss man eine Turingmaschine, die auf dem leeren Band nicht hält, verändern, damit sie auf keiner Eingabe hält?*

Sei L eine Turingmaschine, die alle Eingaben auf dem Band löscht.
Wenn M_ω auf dem leeren Band nicht hält, dann hält $M_\omega \circ L$ auf keiner Eingabe. ($A \circ B$ ist die Turingmaschine, die man erhält, wenn A die Ausgabe von B als Eingabe erhält.)

Damit erhalten wir als informelle Beschreibung von f: *Bilde jedes ω auf die Kodierung von $M_\omega \circ L$ ab.*

f ist total und berechenbar, weil die Komposition zweier Turingmaschinen ($\circ$) total und berechenbar ist.

Jetzt noch zu zeigen $f(\omega) \in H_{nie} \Leftrightarrow \omega \in \overline{H_0}$.

'$\Rightarrow$' schon gezeigt

'$\Leftarrow$' Angenommen $M_\omega \circ L$ hält auf keinem Band. Da L immer hält und ein leeres Band produziert, hält M_ω nicht auf dem leeren Band. Also $\omega \in \overline{H_0}$