Formale Sprachen und Komplexität, SS 18,
Prof. Dr. Volker Heun

# Übungsblatt 6

*Abgabe: bis Mo. 11.06.2018 8 Uhr*

**Institut für Informatik** **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

**Formale Sprachen und Komplexität**, SS 18
**Übungsblatt 6**

*Abgabe: bis Mo. 11.06.2018 8 Uhr*

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

| | Check |
|---|---|
| Aus einer kontextfreien Grammatik einen Kellerautomaten konstruieren können. | |
| Erkennen können, wann ein Kellerautomat nichtdeterministische Übergänge zwingend benötigt. | |
| Den Unterschied zwischen deterministisch kontextfreien und nichtdeterministisch kontextfreien Sprachen erklären können. | |
| Einfache Turingmaschinen konstruieren können. | |
| Eine Sprache begründet in die Chomsky-Hierarchie einordnen können. | |

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

**Aufgabe 6-1** schriftlich bearbeiten
**Kellerautomaten**

a) Konstruieren Sie einen Kellerautomaten, der die Sprache der Palindrome mit Trennzeichen $P = \left\{\omega x \omega^t | \omega \in \{a,b\}^*\right\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, x\}$ durch Endzustand erkennt.
Dabei ist $\omega^t$ die Spiegelung von $\omega$. *Beispiel:* $abb^t = bba$.

**Lösungsvorschlag:**

Das Zeichen 'leer' wird mit $\epsilon$ dargestellt. $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_1, \#, F)$
$Z = \{q_1, q_2\},\ \Sigma = \{a, b, x\},\ \Gamma = \{A, B, \#\}, F = \{q_2\}$

*Anmerkung: da* $\omega \in \{a,b\}^*$, *ist auch das Wort* $x$ *in* $P$.

$$\begin{array}{llll}
\delta(q_1, a, \#) = (q_1, A\#) & & \delta(q_1, x, \#) = (q_2, \#) \\
\delta(q_1, b, \#) = (q_1, B\#) & & \delta(q_1, x, A) = (q_2, A) \\
\delta(q_1, b, A) = (q_1, BA) & & \delta(q_1, x, B) = (q_2, B) \\
\delta(q_1, a, B) = (q_1, AB) & & \delta(q_2, b, B) = (q_2, \epsilon) \\
\delta(q_1, a, A) = (q_1, AA) & & \delta(q_2, a, A) = (q_2, \epsilon) \\
\delta(q_1, b, A) = (q_1, BA) & & \delta(q_2, \epsilon, \#) = (q_2, \epsilon)
\end{array}$$

b) Geben Sie die Konfigurationsabfolge ihres Automaten für das Wort $aabxbaa$ an.

**Aufgabe 6-2 Kellerautomat für kontextfreie Grammatik**

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik mit $V = \{S, A\}$ und $\Sigma = \{a, -\}$ und
$P = \{\ S \to A, \qquad S \to A - S, \qquad A \to a\ \}$.

a) Geben Sie einen Kellerautomaten an, der $L(G)$ durch leeren Keller akzeptiert.

**Lösungsvorschlag:**

Standardkonstruktion des „Top-Down-Akzeptors“ wie im Beweis des Satzes
„$L$ kontextfrei gdw. $\exists$ Kellerautomat $M$ mit $L = N(M)$“ (Seite 64/65).

$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z, S)$ mit $Z = \{z\}$ und $\Gamma = V \cup \Sigma = \{S, A, a, -\}$ und $\delta$ wie folgt

in Langnotation: $\delta(z, c, X) \ni (z', X'_1 \cdots X'_k)$
in Kurznotation: $z,\ X \xrightarrow{c} z',\ X'_1 \cdots X'_k$

$\delta$ :

| | |
|---|---|
| $1:\ z,\ S \xrightarrow{\varepsilon} z,\ A$ | $4:\ z,\ a \xrightarrow{a} z,\ \varepsilon$ |
| $2:\ z,\ S \xrightarrow{\varepsilon} z,\ A - S$ | $5:\ z,\ - \xrightarrow{-} z,\ \varepsilon$ |
| $3:\ z,\ A \xrightarrow{\varepsilon} z,\ a$ | |

**Hinweis:**

Im linken Teil schreibt man praktisch die Grammatik nochmal hin,
immer mit dem einzigen Zustand $z$ und mit einem $\varepsilon$-Übergang.

Im rechten Teil schreibt man für jedes Element von $\Sigma$ eine Übergangsregel,
die das oberste Kellerelement entfernt, wenn es gleich dem Eingabezeichen ist.

b) Geben Sie die Folge von Konfigurationen an, die der Kellerautomat beim Akzeptieren von $a - a - a \in L(G)$ durchläuft.

**Lösungsvorschlag:**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & (z,\ a-a-a,\ S) & & & \\
{}_{1}\top & & \top_{2} & & \\
(z,\ a-a-a,\ A) & & (z,\ a-a-a,\ A-S) & & \\
{}_{3}\top & & \top_{3} & & \\
(z,\ a-a-a,\ a) & & (z,\ a-a-a,\ a-S) & & \\
{}_{4}\top & & \top_{4} & & \\
(z,\ -a-a,\ \varepsilon) & & (z,\ -a-a,\ -S) & & \\
\text{Sackgasse} & & \top_{5} & & \\
 & & (z,\ a-a,\ S) & \overset{1}{\vdash} & (z,\ a-a,\ A) \\
 & & \top_{2} & & \vdots \\
 & & (z,\ a-a,\ A-S) & & \text{Sackgasse} \\
 & & \top_{3} & & \\
 & & (z,\ a-a,\ a-S) & & \\
 & & \top_{4} & & \\
 & & (z,\ -a,\ -S) & & \\
 & & \top_{5} & & \\
 & & (z,\ a,\ S) & \overset{2}{\vdash} & (z,\ a,\ A-S) \\
 & & \top_{1} & & \vdots \\
 & & (z,\ a,\ A) & & \text{Sackgasse} \\
 & & \top_{3} & & \\
 & & (z,\ a,\ a) & & \\
 & & \top_{4} & & \\
 & & (z,\ \varepsilon,\ \varepsilon) & & \\
 & & \text{akzeptiert} & & 
\end{array}
$$

**Aufgabe 6-3** schriftlich bearbeiten
**Turingmaschine zum Erkennen einer formalen Sprache**

Sei die formale Sprache $L = \left\{\omega \in \Sigma^* \mid \omega = a^{2n}b^n, n \in \mathbb{N}\right\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ definiert.

a) Beschreiben Sie informell eine Turingmaschine $M$, die $L$ durch Endzustand akzeptiert.

**Lösungsvorschlag:**

Die Maschine startet am linken Rand des Wortes.

1. Sie liest die ersten beiden as im Wort ein und löscht diese dabei. Ist nur ein a vorhanden, geht sie in den Fehlerzustand. Ist kein a Vorhanden akzeptiert sie.
2. Sie bewegt sie sich zum rechten Rand und löscht das letzte b des Wortes. Ist kein b vorhanden, geht sie in den Fehlerzustand.
3. Sie bewegt sich zum Anfang.
4. Zu Schritt 1.

b) Konstruieren Sie Ihre Turingmaschine $M$.

**Lösungsvorschlag:**

$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_1, \_, E)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \_\}$,
$Z = \{z_1, z_2, r, z_b, \ell, z_{nein}, z_{ja}\}$, $E = \{z_{ja}\}$

$$
\begin{array}{lll}
\delta(z_1, a) = (z_2, \_, R) & \delta(\ell, a) = (\ell, a, L) & \delta(r, a) = (r, a, R) \\
\delta(z_1, b) = (z_{nein}, b, N) & \delta(\ell, b) = (\ell, b, L) & \delta(r, b) = (r, b, R) \\
\delta(z_1, \_) = (z_{ja}, \_, N) & \delta(\ell, \_) = (z_1, \_, R) & \delta(r, \_) = (z_b, \_, L) \\
 & & \\
\delta(z_2, a) = (r, \_, R) & & \delta(z_b, a) = (z_{nein}, a, N) \\
\delta(z_2, b) = (z_{nein}, b, N) & & \delta(z_b, b) = (\ell, \_, L) \\
\delta(z_2, \_) = (z_{nein}, \_, N) & & \delta(z_b, \_) = (z_{nein}, \_, N)
\end{array}
$$

c) Geben Sie den Konfigurationsablauf der Maschine auf dem Wort $a\ a\ a\ a\ b\ b$ an.

**Lösungsvorschlag:**

| Zustand | Konfiguration |
|---|---|
| $z_1$ | _<a>a a a b b _ _ |
| $z_2$ | _ _<a>a a b b _ _ |
| $r$ | _ _ _<a>a b b _ _ |
| $r$ | _ _ _ a<a>b b _ _ |
| $r$ | _ _ _ a a<b>b _ _ |
| $r$ | _ _ _ a a b<b>_ _ |
| $r$ | _ _ _ a a b b<_>_ |
| $z_b$ | _ _ _ a a b<b>_ _ |
| $\ell$ | _ _ _ a a<b>_ _ _ |
| $\ell$ | _ _ _ a<a>b _ _ _ |
| $\ell$ | _ _ _<a>a b _ _ _ |
| $\ell$ | _ _<_>a a b _ _ _ |
| $z_1$ | _ _ _<a>a b _ _ _ |
| $z_2$ | _ _ _ _<a>b _ _ _ |
| $r$ | _ _ _ _ _<b>_ _ _ |
| $r$ | _ _ _ _ _ b<_>_ _ |
| $z_b$ | _ _ _ _ _<b>_ _ _ |
| $\ell$ | _ _ _ _<_>_ _ _ _ |
| $z_1$ | _ _ _ _ _<_>_ _ _ |
| $z_{ja}$ | _ _ _ _ _<_>_ _ _ |

*Endzustand, also akzeptiert*