Formale Sprachen und Komplexität, SS 18, Prof. Dr. Volker Heun

Übungsblatt 9

Abgabe: bis Mo. 02.07.2018 8 Uhr

Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Übungsblatt 9

Abgabe: bis Mo. 02.07.2018 8 Uhr

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

	Check
Die Funktion μf zu einer Funktion f bestimmen können.	
Neue μ-rekursive Funktionen gemäß des μ-Schemas aufstellen können.	
Primitiv-rekursive Funktionen angeben können	

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

Aufgabe 9-1 schriftlich bearbeiten
μ-Schema

a) Sei $h(x, y) = sub(y, mult(x, x))$. Welche Funktion ist $f = \mu h$? (man schreibt für f auch $f(y) = (\mu x)[\, h(x, y) = 0\,]$)

Lösungsvorschlag:

Vorüberlegungen:

x	$y = 9$, $h(x,y)$	
0	$sub(9, 0^2) = 9$	definiert, $\neq 0$
1	$sub(9, 1^2) = 8$	definiert, $\neq 0$
2	$sub(9, 2^2) = 5$	definiert, $\neq 0$
3	$sub(9, 3^2) = 0$	
	$f(9) = 3$	

x	$y = 8$, $h(x,y)$	
0	$sub(8, 0^2) = 8$	definiert, $\neq 0$
1	$sub(8, 1^2) = 7$	definiert, $\neq 0$
2	$sub(8, 2^2) = 4$	definiert, $\neq 0$
3	$sub(8, 3^2) = 0$	
	$f(8) = 3$	

Behauptung:
$f(x) = (\mu y)[\, h(y, x) = 0\,]$ für $h(y, x) = sub(x, mult(y, y))$
ist die aufgerundete Wurzel von x, also $f(x) = \lceil \sqrt{x}\, \rceil$.

Beweis:
Für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt:
Für jedes $y < \lceil \sqrt{x}\, \rceil$, also $y < \sqrt{x}$, also $y^2 < x$, ist $h(y, x)$ definiert und $\neq 0$.
Für $y = \lceil \sqrt{x}\, \rceil$, also $y^2 \geq x$, ist $h(y, x) = 0$.
Also ist $y = \lceil \sqrt{x}\, \rceil$ das kleinste y mit $h(y, x) = 0$ und vorher überall definiert.

b) Definieren Sie eine Funktion $h'(x, y)$, so dass $f' = \mu h'$ $\quad (f'(y) = (\mu x)[\, h'(x, y) = 0\,])$ die partielle Wurzelfunktion auf $\mathbb{N}$ ist:

$$\begin{array}{rccl} sqrt: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{falls } x \text{ Quadratzahl} \\ \text{undefiniert} & \text{andernfalls} \end{cases} \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Vorüberlegungen:

x	$y = 9$ $h'(x, y)$	
0	$absdiff(9, 0^2) = 9$	definiert, $\neq 0$
1	$absdiff(9, 1^2) = 8$	definiert, $\neq 0$
2	$absdiff(9, 2^2) = 5$	definiert, $\neq 0$
3	$absdiff(9, 3^2) = 0$	
		$f'(9) = 3$

x	$y = 8$ $h'(x, y)$	
0	$absdiff(8, 0^2) = 8$	definiert, $\neq 0$
1	$absdiff(8, 1^2) = 7$	definiert, $\neq 0$
2	$absdiff(8, 2^2) = 4$	definiert, $\neq 0$
3	$absdiff(8, 3^2) = 1$	definiert, $\neq 0$
4	$absdiff(8, 4^2) = 8$	definiert, $\neq 0$
$\vdots$		$\vdots$
		$f'(8)$ undefiniert

Behauptung:
$f'(y) = (\mu x)[\, h'(x, y) = 0\,]$ für $h'(x, y) = absdiff(y, mult(x, x))$
ist die partielle Funktion $sqrt(x)$.

Beweis:

Für jedes $y \in \mathbb{N}$ mit y Quadratzahl gilt $\sqrt{y} \in \mathbb{N}$ und:
  Für jedes $x < \sqrt{y}$, also $x^2 < y$, ist $h'(x, y)$ definiert und $\neq 0$.
  Für $x = \sqrt{y}$, also $x^2 = y$, ist $h'(x, y) = 0$.
  Also ist $x = \sqrt{y}$ das kleinste x mit $h'(x, y) = 0$ und vorher überall definiert.

Für jedes $y \in \mathbb{N}$ mit y keine Quadratzahl gilt:
  Für jedes x ist $x^2 \neq y$, also $h'(x, y) \neq 0$.
  Also gibt es kein kleinstes x mit $h'(x, y) = 0$.

Lösungsvorschlag:

Bemerkung:

Um zu zeigen, dass f und f' μ-rekursiv sind,
müsste man noch zeigen, dass h und h' μ-rekursiv sind.

Das kann man, indem man ihre Definitionen
in die syntaktische Form des Kompositionsschemas bringt:

$h(y, x) = sub(\, \Pi_2^2(y, x), g(y, x)\,)$ mit $g(y, x) = mult(\, \Pi_1^2(y, x), \Pi_1^2(y, x)\,)$

$h'(y, x) = absdiff(\, \Pi_2^2(y, x), g(y, x)\,)$ mit $g(y, x) = mult(\, \Pi_1^2(y, x), \Pi_1^2(y, x)\,)$

Aufgabe 9-2 schriftlich bearbeiten

μ-Schema

Geben Sie $f(y) = (\mu x)[\, h(x, y) = 0\,]$ jeweils in geschlossener Form an (mit Beweis) für:

a) $h(x, y) = sub(x, y)$

Lösungsvorschlag:

$f(y) = 0$ für jedes $y \in \mathbb{N}$

Beweis:

Für jedes $y \in \mathbb{N}$ gilt:
$sub(0, y) = 0$.
Also ist $x = 0$ das kleinste x mit $sub(x, y) = 0$.

b) $h(x, y) = sub(y, x)$

Lösungsvorschlag:

$f(y) = y$ für jedes $y \in \mathbb{N}$

Beweis:

Für jedes $y \in \mathbb{N}$ gilt:
Für jedes $x < y$ ist $sub(y, x)$ definiert und $\neq 0$.
Für $x = y$ ist $sub(y, x) = 0$.
Also ist $x = y$ das kleinste x mit $sub(y, x) = 0$ und vorher überall definiert.

c) $h(x,y) = |y - 2x|$

Lösungsvorschlag:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{2} & \text{falls } y \text{ gerade} \\ \text{undefiniert} & \text{falls } y \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis:

Für jedes gerade $y \in \mathbb{N}$ gilt:
Für jedes $x < \frac{y}{2}$ ist $|y - 2x|$ definiert und $\neq 0$.
Für $x = \frac{y}{2}$ ist $|y - 2x| = 0$.
Also ist $x = \frac{y}{2}$ das kleinste x mit $|y - 2x| = 0$ und vorher überall definiert.

Für jedes ungerade $y \in \mathbb{N}$ gilt:
Für jedes x ist $|y - 2x| \neq 0$.
Also gibt es kein kleinstes x mit $|y - 2x| = 0$.

d) $h(x,y) = \begin{cases} sub(y, 2x) & \text{falls } y \geq x \\ \text{undefiniert} & \text{falls } y < x \end{cases}$

Lösungsvorschlag:

$f(y) = \lceil \frac{y}{2} \rceil$ für jedes $y \in \mathbb{N}$

Beweis:

Für jedes gerade $y \in \mathbb{N}$ gilt $\lceil \frac{y}{2} \rceil = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}$ und:
Für jedes $x < \frac{y}{2}$, also $2x < y$, ist $sub(y, 2x)$ definiert und $\neq 0$.
Für $x = \frac{y}{2}$, also $2x = y$, ist $sub(y, 2x) = 0$.
Also ist $x = \lceil \frac{y}{2} \rceil$ das kleinste x mit $sub(y, 2x) = 0$ und vorher überall definiert.

Für jedes ungerade $y \in \mathbb{N}$ gilt: $\lceil \frac{y}{2} \rceil = \frac{y+1}{2} \in \mathbb{N}$
Für jedes $x < \frac{y+1}{2}$, also $2x < y + 1$, also (weil y ungerade) $2x < y$,
ist $sub(y, 2x)$ definiert und $\neq 0$.
Für $x = \frac{y+1}{2}$, also $2x = y + 1$, ist $sub(y, 2x) = 0$.
Also ist $x = \lceil \frac{y}{2} \rceil$ das kleinste x mit $sub(y, 2x) = 0$ und vorher überall definiert.

Lösungsvorschlag:

Bemerkung:

Anwendung des μ-Operators auf eine totale Funktion h
kann eine nichttotale Funktion f ergeben (Fall c)
und umgekehrt (Fall d)

Aufgabe 9-3 Ackermann-Funktion

Sei $ack : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Ackermann-Funktion mit der Definition

$$\begin{array}{lcl} ack(0, \quad n) & = & n+1 \\ ack(k+1, 0) & = & ack(k, 1) \\ ack(k+1, n+1) & = & ack(k, ack(k+1, n)) \end{array}$$

a) Sei $s_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s_2(x, y) = y + 1$ (also Nachfolger des zweiten Arguments).

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $ack(0, n) = s_2(2,\ n{+}3) - 3$.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $ack(1, n) = add(2,\ n{+}3) - 3$.

c) Es gelten völlig analoge Gleichungen für $ack(2, n)$ und $ack(3, n)$ und $ack(4, n)$, wobei lediglich anstelle von *add* andere zweistellige Funktionen stehen. Geben Sie diese Gleichungen an und beweisen Sie sie.

Lösungsvorschlag:

Behauptung: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{array}{lcr} ack(0, n) & = & s_2(2,\ n{+}3) - 3 \\ ack(1, n) & = & add(2,\ n{+}3) - 3 \\ ack(2, n) & = & mult(2,\ n{+}3) - 3 \\ ack(3, n) & = & hoch(2,\ n{+}3) - 3 \\ ack(4, n) & = & hypexp(2,\ n{+}3) - 3 \end{array}$$

mit $hypexp :$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{falls } y = 0 \\ \left. x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x^x}}}}} \right\} y\text{-mal (jeweils rechts geklammert)} & \text{andernfalls} \end{cases} \end{array}$$

Beweise:

$k=0:$ $\quad s_2(2,\ n{+}3)-3 = n+3+1-3 = n+1 \stackrel{\text{Def}}{=} ack(0,n)$

$k=1:$ $\quad add(2,\ n{+}3)-3 = 2+n+3-3 = n+2$

Beweis durch vollständige Induktion nach n dass $ack(1,n)=n+2$

$n=0:$ $\quad ack(1,0) = ack(0,1) \stackrel{k=0}{=} 1+1 = 0+2$

$n\to n+1:$ $\quad ack(1,n+1) = ack(0, ack(1,n)) \stackrel{\text{IA}}{=}$

$ack(0,n+2) \stackrel{k=0}{=} (n+2)+1 = (n+1)+2$

$k=2:$ $\quad mult(2,\ n{+}3)-3 = 2(n+3)-3 = 2n+3$

Beweis durch vollständige Induktion nach n dass $ack(2,n)=2n+3$

$n=0:$ $\quad ack(2,0) = ack(1,1) \stackrel{k=1}{=} 1+2 = 3 = 2\cdot 0+3$

$n\to n+1:$ $\quad ack(2,n+1) = ack(1, ack(2,n)) \stackrel{\text{IA}}{=}$

$ack(1,2n+3) \stackrel{k=1}{=} 2n+3+2 = 2(n+1)+3$

$k=3:$ $\quad hoch(2,\ n{+}3)-3 = 2^{n+3}-3$

Beweis durch vollständige Induktion nach n dass $ack(3,n)=2^{n+3}-3$

$n=0:$ $\quad ack(3,0) = ack(2,1) \stackrel{k=2}{=} 2\cdot 1+3 = 5 = 2^{0+3}-3$

$n\to n+1:$ $\quad ack(3,n+1) = ack(2, ack(3,n)) \stackrel{\text{IA}}{=}$

$ack(2,2^{n+3}-3) \stackrel{k=2}{=} 2(2^{n+3}-3)+3 = 2^{(n+1)+3}-3$

$k=4:$ $\quad hypexp(2,\ n{+}3)-3 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{(n+3)\text{ Mal}} - 3$

Beweis durch vollständige Induktion nach n dass $ack(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{(n+3)\text{ Mal}} - 3$

$n=0:$ $\quad ack(4,0) = ack(3,1) \stackrel{k=3}{=} 2^{1+3}-3 = 2^4-3 = \underbrace{2^{2^{2}}}_{(0+3)\text{ Mal}} - 3$

$n\to n+1:$ $\quad ack(4,n+1) = ack(3, ack(4,n)) \stackrel{\text{IA}}{=}$

$ack(3, \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{(n+3)\text{ Mal}} - 3) \stackrel{k=3}{=} hoch\Big(2,\ (\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{(n+3)\text{ Mal}} - 3)+3\Big) - 3 = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{((n+1)+3)\text{ Mal}} - 3$

Die folgenden Funktionen können als primitiv rekursiv vorausgesetzt werden:

Addition $add: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x + y$	Multiplikation $mult: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto x \cdot y$
modifizierte Subtraktion $sub: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x < y \\ x - y & \text{andernfalls} \end{cases}$	absolute Differenz $absdiff: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(x, y) \mapsto \lvert x - y \rvert$
Signum $sg: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{andernfalls} \end{cases}$	Kosignum $\overline{sg}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$

Aufgabe 9-4 schriftlich bearbeiten
primitive Rekursion

Weisen Sie formal nach, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils eine Definition der Funktion an, die strikt nach den syntaktischen Vorgaben des Kompositions- und/oder Rekursionsschemas für primitive Rekursion aufgebaut ist.

Bei Bedarf können Sie die oben angegebenen Funktionen ohne Beweis verwenden.

a) Die Geradefunktion $\quad evn : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

vgl. Extrablatt/Folie

$$\begin{aligned} evn(0) &= k_1() \\ evn(n+1) &= h(evn(n), n) \\ &\quad h(u,v) = \overline{sg}(\Pi^2_1(u,v)) \end{aligned}$$

b) Die Potenzierfunktion $\quad hoch : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$(x,n) \mapsto x^n$$

Hinweis: das Rekursionsschema verlangt die Rekursion im ersten Argument. Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion mit dem Kompositionsschema auf eine Hilfsfunktion mit vertauschten Argumenten zurückgeführt werden kann: $hoch(x,n) = potenz(n,x)$. Definieren Sie dann diese Hilfsfunktion.

Lösungsvorschlag:

vgl. Extrablatt/Folie

$$\begin{aligned} hoch(x,n) &= potenz(\Pi^2_2(x,n), \Pi^2_1(x,n)) \\ potenz(0,x) &= k_1(x) \\ potenz(n+1,x) &= h(potenz(n,x), n, x) \\ &\quad h(u,v,w) = mult(\Pi^3_1(u,v,w), \Pi^3_3(u,v,w)) \end{aligned}$$

c) Die modifizierte Modulo-Funktion $\quad rest : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$(n,x) \mapsto \begin{cases} n & \text{falls } x = 0 \\ n \bmod x & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Es gilt $(n+1) \bmod x = (n \bmod x) + 1$, falls $(n \bmod x) + 1 \neq x$ ist, andernfalls 0. Aufbauend auf dieser Beobachtung kann *rest* so definiert werden, dass gilt:

$$\begin{aligned} rest(0, \quad x) \quad & [\; = \; 0 \;] \\ rest(n+1, x) \quad & [\; = \; mult\Big(\; s(rest(n,x)), \quad sg(absdiff(\; s(rest(n,x)), \; x\;)) \; \Big) \;] \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

vgl. Extrablatt/Folie

$$\begin{aligned} rest(0,x) &= k_0(x) \\ rest(n+1,x) &= h(rest(n,x), n, x) \\ &\quad h(u,v,w) = mult(g_1(u,v,w), g_2(u,v,w)) \\ &\quad g_1(u,v,w) = s(\Pi^3_1(u,v,w)) \\ &\quad g_2 = sg(g_3(u,v,w)) \\ &\quad g_3 = absdiff(g_1(u,v,w), \Pi^3_3(u,v,w)) \end{aligned}$$

Der Fall $x = 0$ ist mit dieser Definition auch abgedeckt. (Illustration an einem Beispiel, etwa $rest(4,0) = 4$.)