

Übungen zur Algorithmischen Bioinformatik II

Blatt 11

Abgabetermin: Donnerstag, 25.01.2018, vor Beginn der Vorlesung

1. Aufgabe (Bonus-Aufgabe):

Betrachten Sie das folgende Modell $M(\theta)$ mit

$$\theta \in \Theta = \{(p_1, \dots, p_4) : p_i \in [0, 1] \wedge p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \wedge p_1 + p_2 = p_3 + p_4\}$$

für das Werfen eines Tetraeders, wobei bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit p_i die Seitenfläche i unten liegt. Weiter sei die Wahrscheinlichkeit für die Seitenflächen 1 und 2 genau so groß wie für 3 und 4.

Angenommen, der Tetraeder wurde N -mal geworfen und dabei kam die Seite i genau N_i -mal unten zu liegen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\theta^* \in \Theta$.

2. Aufgabe (Bonus-Aufgabe):

Bestimmen Sie die Maximum-A-Posteriori-Schätzer für

- den Parameter p der Binomialverteilung. Als Prior-Verteilung soll hierbei die Beta-Verteilung verwendet werden.
- die Parameter p_1, \dots, p_n der Multinomialverteilung. Als Prior-Verteilung soll hierbei die Dirichlet-Verteilung verwendet werden.

3. Aufgabe:

Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsvariable mit Mittelwert μ und Varianz 1 (d.h. $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{N}(0, 1)$ eine konjugierte Priorverteilung für μ ist. Zeigen Sie also, dass die Posterior-Verteilung für eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ ebenfalls eine Normalverteilung ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$P(\mu)P(x|\mu) = \frac{1}{(2\pi)} \exp\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\left(\mu - \frac{x}{2}\right)^2\right). \quad (1)$$

Berechnen Sie nun $P(\mu|x)$. Um $P(x)$ berechnen, müssen Sie Gleichung (1) über μ integrieren. Nutzen Sie dazu aus, dass das Integral über eine Gaußfunktion 1 ergibt.

4. Aufgabe:

Ein Fußballspieler trifft bei einem Elfmeter mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- (a) $1/2$, falls er die letzten beiden Male nicht getroffen hat.
- (b) $2/3$, falls er mindestens bei einem der letzten beiden Elfmeter getroffen hat.
- (c) $3/4$, falls er die letzten beide Male getroffen hat.

Formulieren Sie ein Markov-Modell um das Treff-Verhalten des Fußballspielers zu modellieren. Hierbei sei die Anfangswahrscheinlichkeit, dass er den Elfmeter trifft, 50%. Bestimmen Sie dann die stationäre Verteilung der induzierten Markov-Kette.