Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Grundlagen ................................................................. 1
  1.1 Ziele .......................................................................................... 1
  1.2 Einführendes Beispiel: Berechnung der Fibonacci-Zahlen .......... 2
    1.2.1 Rekursive Berechnung ......................................................... 2
    1.2.2 Iterative Berechnung ......................................................... 5
    1.2.3 Berechnung mit Hilfe des iterierten Quadrierens ............... 6
  1.3 Grundlagen ................................................................................. 10
    1.3.1 Registermaschine (RAM) .................................................... 10
    1.3.2 Zeitkomplexität ................................................................. 13
    1.3.3 Platzkomplexität ............................................................... 17
    1.3.4 Beschreibungskomplexität ................................................. 19
    1.3.5 Landausche Symbole ......................................................... 19
  1.4 Übungsaufgaben .......................................................................... 24

2 Sortieren .......................................................................................... 27
  2.1 Einfache Sortieralgorithmen ....................................................... 27
    2.1.1 Relationen, Ordnungen und Sortierungen ......................... 27
    2.1.2 Sortieren durch Auswahl ................................................... 29
    2.1.3 Sortieren durch Einfügen .................................................. 31
    2.1.4 Verbessertes Sortieren durch Einfügen .............................. 33
  2.2 Mergesort .................................................................................... 34
    2.2.1 Rekursiver Mergesort ......................................................... 35
    2.2.2 Analyse des rekursiven Mergesort ..................................... 36
    2.2.3 Iterativer Mergesort .......................................................... 39
    2.2.4 Analyse des iterativen Mergesort ..................................... 40
  2.3 Heapsort ....................................................................................... 41
    2.3.1 Heaps und generischer Heapsort ........................................ 42
    2.3.2 Implementierung von Heaps ............................................... 43
    2.3.3 Standard-Heapsort ............................................................. 49
    2.3.4 Analyse von Standard-Heapsort ....................................... 51
    2.3.5 Carlssons Variante von Heapsort ..................................... 53
    2.3.6 Bottom-Up-Heapsort ......................................................... 56
  2.4 Quicksort ...................................................................................... 57
    2.4.1 Allgemeines Verfahren ...................................................... 57
4 Suchen

4.1 Wörterbücher .......................................................... 119
4.2 Ausnutzen von Sortierung ........................................... 120
  4.2.1 Lineare Suche ....................................................... 120
  4.2.2 Binäre Suche ...................................................... 120
  4.2.3 Exponentielle Suche ............................................. 120
4.3 Hashing ................................................................. 121
  4.3.1 Hashfunktionen ................................................... 122
  4.3.2 Hashing durch Verkettung ..................................... 125
  4.3.3 Linear Probing .................................................... 126
  4.3.4 Quadratic Probing ............................................... 129
  4.3.5 Double Hashing .................................................. 130
  4.3.6 Universelle Hashfunktionen .................................... 132
4.4 Binäre Suchbäume .................................................... 134
  4.4.1 Suchbaumeigenschaft ............................................ 134
  4.4.2 Suchen und Einfügen im binären Suchbaum ................. 135
  4.4.3 Löschen im binären Suchbaum ................................ 135
4.5 AVL-Bäume ............................................................. 137
  4.5.1 Höhenbalancierung ............................................... 137
  4.5.2 Einfügen in einen AVL-Baum ................................ 140
  4.5.3 Löschen im AVL-Baum .......................................... 143
4.6 (a, b)-Bäume .......................................................... 146
  4.6.1 Definition ........................................................... 147
  4.6.2 Einfügen in einen (a, b)-Baum ................................ 148
  4.6.3 Löschen im (a, b)-Baum ........................................ 149
4.7 Weitere Varianten von Suchbäumen ................................. 151
  4.7.1 Vielweg-Suchbäume ............................................... 151
  4.7.2 Balancierte Suchbäume .......................................... 152
4.8 Tries ................................................................. 153
  4.8.1 Einfügen und Löschen in Tries ............................... 153
  4.8.2 Implementierung von Tries ..................................... 154
4.9 Übungsaufgaben ....................................................... 156

5 Graphen

5.1 Grundlagen der Graphentheorie .................................... 157
  5.1.1 Ungerichtete Graphen .......................................... 157
  5.1.2 Gerichtete Graphen ............................................. 160
  5.1.3 Repräsentationen von Graphen ............................... 164
5.2 Traversieren von Graphen .......................................... 166
  5.2.1 Tiefensuche (DFS) ................................................ 166
5.2.2 Breitensuche (BFS) ........................................... 169
5.2.3 Traversieren von Bäumen .................................. 172
5.3 Zusammenhang von Graphen ...................................... 173
  5.3.1 Ungerichtete Graphen .................................. 173
  5.3.2 Gerichtete Graphen .................................. 173
5.4 Kürzeste Wege .................................................. 178
  5.4.1 Der Algorithmus von Floyd ................................. 179
  5.4.2 Transitive Hülle von Graphen .............................. 183
  5.4.3 Der Algorithmus von Dijkstra .............................. 186
  5.4.4 Der Algorithmus von Dijkstra mit Priority Queues ......... 188
5.5 Interludium: Fibonacci-Heaps .................................... 192
  5.5.1 Aufbau eines Fibonacci-Heaps .............................. 192
  5.5.2 Analyse von Fibonacci-Heaps .............................. 196
5.6 Minimale Spannbäume .......................................... 199
  5.6.1 Der Algorithmus von Prim ................................ 200
  5.6.2 Der Algorithmus von Kruskal .............................. 204
5.7 Interludium: Union-Find-Datenstrukturen ...................... 206
  5.7.1 Darstellung von Mengen durch Listen ...................... 206
  5.7.2 Darstellung von Mengen durch Bäume ...................... 208
  5.7.3 Pfadkompression ...................................... 210
5.8 Übungsaufgaben ............................................. 212

6 Texte 215
  6.1 Alphabete und Zeichenketten ................................. 215
  6.2 Der Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt ................. 216
    6.2.1 Die Idee ........................................ 216
    6.2.2 Analyse des Algorithmus von Knuth, Morris und Pratt .. 218
    6.2.3 Bestimmung eigentlicher Ränder ....................... 219
  6.3 Der Algorithmus von Boyer und Moore ......................... 221
    6.3.1 Die Idee ........................................ 221
    6.3.2 Bestimmung der Shift-Tabelle ......................... 224
    6.3.3 Analyse des Algorithmus von Boyer und Moore .......... 226
  6.4 Tries für Texte ............................................ 230
    6.4.1 Suffix-Tries ...................................... 231
    6.4.2 Suffix-Bäume ...................................... 234
    6.4.3 Suchen mit Suffix-Bäumen ............................ 238
  6.5 Interludium: Datenkompression ................................ 239
    6.5.1 Eine untere Schranke ................................ 239
    6.5.2 Huffman-Kodierung .................................. 240
    6.5.3 Lempel-Ziv-77 ...................................... 244
    6.5.4 Lempel-Ziv-78 ...................................... 245
6.5.5 Lempel-Ziv-Welch ................................. 246
6.5.6 Die Burrows-Wheeler-Transformation .......... 247
6.6 Übungsaufgaben ............................... 249

7 Arithmetik 251
7.1 Euklidischer Algorithmus .............................. 251
7.1.1 Grundalgorithmus ................................. 251
7.1.2 Erweiterte Version ................................. 253
7.1.3 iterative Implementierungen ..................... 255
7.1.4 Effiziente Implementierungen ................... 256
7.2 Modulare Arithmetik .................................. 258
7.2.1 Grundlagen ....................................... 259
7.2.2 Modulare Gleichungen ............................. 262
7.2.3 Chinesischer Restsatz .............................. 263
7.2.4 Berechnung von Potenzen ......................... 264
7.3 Primzahlen ................................. 265
7.3.1 Elementare Ergebnisse ............................ 266
7.3.2 Primzahltests ................................. 269
7.4 Interludium: Kryptographie ......................... 273
7.4.1 Public-Key-Kryptographie ......................... 273
7.4.2 Das RSA-Verfahren ................................ 275
7.4.3 Sicherheit des RSA-Verfahrens .................. 276
7.5 Die schnelle Fouriertransformation ................. 277
7.5.1 Multiplikation von Polynomen .................... 277
7.5.2 Eine alternative Methode zur Polynommultiplikation ... 278
7.5.3 Berechnung der Konvolution mittels FFT ........ 279
7.6 Multiplikation ganzer Zahlen ....................... 283
7.6.1 Analyse der Schulmethode ......................... 283
7.6.2 Ein Divide-and-Conquer-Algorithmus .......... 284
7.6.3 Analyse des Algorithmus von Karatsuba und Ofman ... 285
7.6.4 Verbesserung des Algorithmus von Karatsuba und Ofman 287
7.7 Optimale Klammerung von Matrizenprodukten ....... 290
7.7.1 Einleitendes Beispiel ............................. 290
7.7.2 Anzahl verschiedener Klammerungen .......... 290
7.7.3 Lösung mit dynamischer Programmierung ........ 293
7.8 Matrizenmultiplikation ............................ 294
7.8.1 Der Algorithmus von Strassen .................. 295
7.8.2 Analyse des Algorithmus von Strassen .......... 296
7.8.3 Verbesserung des Algorithmus von Strassen ....... 297
7.8.4 Weitere Entwicklungen .......................... 300
7.8.5 Invertierung von Matrizen ....................... 300
8 Schwierige Probleme 307
8.1 Unentscheidbarkeit 307
8.1.1 Entscheidungsprobleme 307
8.1.2 Abzählbarkeit 308
8.1.3 Gödelisierung 311
8.1.4 Universelle Registermaschinen 313
8.1.5 Unentscheidbare Probleme 314
8.1.6 Die Church-Turing These 317
8.2 \( \mathcal{NP} \)-Vollständigkeit 317
8.2.1 Die Klassen \( \mathcal{P} \) und \( \mathcal{NP} \) 318
8.2.2 Standard-Registermaschinen 319
8.2.3 Reduktionen 321
8.2.4 \( \mathcal{NP} \)-harte und \( \mathcal{NP} \)-vollständige Probleme 323
8.2.5 Erfüllbarkeitsproblem 325
8.2.6 Satz von Cook 327
8.2.7 Konjunktive Normalform und 3SAT 331
8.2.8 Beispiele \( \mathcal{NP} \)-vollständiger Probleme 333
8.3 Approximative Algorithmen 339
8.3.1 Optimierungsprobleme und Approximationen 340
8.3.2 Die Klassen \( \mathcal{NP}^0 \) und \( \mathcal{PO} \) 343
8.3.3 Die Klasse \( \mathcal{APX} \) 344
8.3.4 Die Klasse \( \mathcal{PTAS} \) 345
8.3.5 Die Klasse \( \mathcal{FPTAS} \) 347
8.4 Übungsaufgaben 353

A Literaturhinweise 355
A.1 Lehrbücher zur Algorithmmik 355
A.2 Lehrbücher zu angrenzenden Themen 356
A.3 Originalarbeiten 357

B Gofer-Skripten 359
B.1 Berechnung von Fibonacci Zahlen 359

C Index 361