Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Tutoriumsblatt 5

Aufgabe 5-1 CYK-Algorithmus

Gegeben sei die folgende Grammatik:

$$G = (V, \Sigma, P, S) \text{ mit } V = \{S, A, B, C\},\ \Sigma = \{a, b\} \text{ und } P = \{\ \begin{array}{l} S \to AB \mid BC, \\ A \to BA \mid a, \\ B \to CC \mid b, \\ C \to AB \mid a, \end{array} \quad \}$$

Überprüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK), ob das Wort *baaba* zu $L(G)$ gehört.

Lösungsvorschlag:

b	a	a	b	a
B	A,C	A,C	B	A,C
A,S	B	S,C	A,S	
—	B	B		
—	S,C,A			
S,A,C				

Aufgabe 5-2 Chomsky-Normalform

Sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gegeben mit $V = \{S, R, T, X, Y\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$ und P :

$S \to aRa$	$S \to bTb$		
$R \to X$	$X \to Y$	$Y \to R$	
$R \to T$	$T \to S$	$T \to aa$	$T \to b$

Konstruieren Sie eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$

Lösungsvorschlag:

0. ε-Produktionen beseitigen (falls überhaupt erlaubt)

entfällt hier

1. Kettenproduktionen beseitigen

1.a) Zyklus $R \to X \to Y \to R$ durch neues Z ersetzen:

$S \to aZa$	$S \to bTb$		
$Z \to T$	$T \to S$	$T \to aa$	$T \to b$

1.b) Kette $Z \to T \to S$ von hinten her beseitigen:

in $T \to S$ einsetzen:

$S \to aZa$	$S \to bTb$		
$Z \to T$			
$T \to aZa$	$T \to bTb$	$T \to aa$	$T \to b$

in $Z \to T$ einsetzen:

$S \to aZa$	$S \to bTb$		
$Z \to aZa$	$Z \to bTb$	$Z \to aa$	$Z \to b$
$T \to aZa$	$T \to bTb$	$T \to aa$	$T \to b$

2. Separieren (neue Variable für jedes Terminalsymbol)

$S \to AZA$	$S \to BTB$		
$Z \to AZA$	$Z \to BTB$	$Z \to AA$	
$T \to AZA$	$T \to BTB$	$T \to AA$	
$A \to a$	$B \to b$	$Z \to b$	$T \to b$

3. Zerlegen der rechten Seiten mit Länge > 2

$S \to AC$	$S \to BD$		
$C \to ZA$	$D \to TB$		
$Z \to AE$	$Z \to BF$	$Z \to AA$	
$E \to ZA$	$F \to TB$		
$T \to AG$	$T \to BH$	$T \to AA$	
$G \to ZA$	$H \to TB$		
$A \to a$	$B \to b$	$Z \to b$	$T \to b$

Aufgabe 5-3 Kellerautomaten

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{\ a^i b^k c^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < i \text{ und } 0 < j \text{ und } i + j = k\ \}$.

a) Geben Sie einen Kellerautomaten M an mit $N(M) = L$.
(Der Automat soll durch leeren Keller akzeptieren.)

Lösungsvorschlag:

$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, 1, \#)$ mit $Z = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\Gamma = \{A, B, \#\}$ und δ wie folgt

in Langnotation: $\delta(z, c, X) \ni (z', X'_1 \cdots X'_k)$
in Kurznotation: $z,\ X \xrightarrow{c} z',\ X'_1 \cdots X'_k$

δ :

$1,\ \# \xrightarrow{a} 1,\ A\#$			
$1,\ A \xrightarrow{a} 1,\ AA$	$2,\ A \xrightarrow{b} 2,\ \varepsilon$	$3,\ B \xrightarrow{b} 3,\ BB$	$4,\ B \xrightarrow{c} 4,\ \varepsilon$
$1,\ A \xrightarrow{b} 2,\ \varepsilon$	$2,\ \# \xrightarrow{b} 3,\ B\#$	$3,\ B \xrightarrow{c} 4,\ \varepsilon$	$4,\ \# \xrightarrow{\varepsilon} 4,\ \varepsilon$

b) Geben Sie alle Konfigurationen an, die M mit dem Eingabewort *aabbbbbccc* erreicht.

Lösungsvorschlag:

$(1,\ aabbbbbccc,\ \#)$
$\vdash$
$(1,\ abbbbbccc,\ A\#)$
$\vdash$
$(1,\ bbbbbccc,\ AA\#)$
$\vdash$
$(2,\ bbbbccc,\ A\#)$
$\vdash$
$(2,\ bbbccc,\ \#)$
$\vdash$
$(3,\ bbccc,\ B\#)$
$\vdash$
$(3,\ bccc,\ BB\#)$
$\vdash$
$(3,\ ccc,\ BBB\#)$
$\vdash$
$(4,\ cc,\ BB\#)$
$\vdash$
$(4,\ c,\ B\#)$
$\vdash$
$(4,\ \varepsilon,\ \#)$
$\vdash$
$(4,\ \varepsilon,\ \varepsilon)$
akzeptiert

c) Sei L' definiert wie L aber mit $i + j \leq k$ statt $i + j = k$.
Lösen Sie die beiden vorherigen Teilaufgaben für L'.

Lösungsvorschlag:

Im Vergleich zu L dürfen die Wörter also „überzählige“ b’s zwischen den a’s und c’s enthalten.
Der Automat M' ist wie M, aber mit einem zusätzlichen Übergang,
um im Zustand 4 ein B aus dem Keller zu nehmen, ohne ein Zeichen zu lesen.

δ' :

$1,\ \# \xrightarrow{a} 1,\ A\#$			neu $\boxed{4,\ B \xrightarrow{\varepsilon} 4,\ \varepsilon}$
$1,\ A \xrightarrow{a} 1,\ AA$	$2,\ A \xrightarrow{b} 2,\ \varepsilon$	$3,\ B \xrightarrow{b} 3,\ BB$	$4,\ B \xrightarrow{c} 4,\ \varepsilon$
$1,\ A \xrightarrow{b} 2,\ \varepsilon$	$2,\ \# \xrightarrow{b} 3,\ B\#$	$3,\ B \xrightarrow{c} 4,\ \varepsilon$	$4,\ \# \xrightarrow{\varepsilon} 4,\ \varepsilon$

Konfigurationen:

$$
\begin{array}{l}
(1,\ aabbbbbccc,\ \#) \\
\vdash (1,\ abbbbbccc,\ A\#) \\
\vdash (1,\ bbbbbccc,\ AA\#) \\
\vdash (2,\ bbbbccc,\ A\#) \\
\vdash (2,\ bbbccc,\ \#) \\
\vdash (3,\ bbccc,\ B\#) \\
\vdash (3,\ bccc,\ BB\#) \\
\vdash (3,\ ccc,\ BBB\#) \\
\vdash (4,\ cc,\ BB\#) \\
\vdash (4,\ c,\ B\#) \\
\vdash (4,\ \varepsilon,\ \#) \\
\vdash (4,\ \varepsilon,\ \varepsilon) \\
\text{akzeptiert}
\end{array}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{llll}
\vdash^{\text{neu}} & (4,\ cc,\ B\#) & \vdash^{\text{neu}} & (4,\ cc,\ \#) \\
 & \vdash & & \vdash \\
\vdash^{\text{neu}} & (4,\ c,\ \#) & & (4,\ cc,\ \varepsilon) \\
 & \vdash & & \text{Sackgasse} \\
 & (4,\ c,\ \varepsilon) & & \\
 & \text{Sackgasse} & &
\end{array}
}
$$