Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Tutoriumsblatt 9

Aufgabe 9-1 **μ-Rekursion**

Geben Sie jeweils eine Hilfsfunktion h an, sodass μh der angegeben Funktion entspricht.

a)

$$\begin{aligned} mean : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto \left\lceil \frac{a+b}{2} \right\rceil \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^3 &\rightarrow \mathbb{N} \\ (i,a,b) &\mapsto sub(add(a,b), mult(i,2)) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a > b \\ b & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^3 &\rightarrow \mathbb{N} \\ (i,a,b) &\mapsto add(sub(a,i), sub(b,i)) \end{aligned}$$

Bemerkung: $add(sub(a,i), sub(b,i)) = (a-i)+(b-i) = a+b-2\cdot i = sub(add(a,b), mult(i,2))$ Ist nicht zulässig. $sub \neq -$

c)

$$\begin{aligned} eq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a,b) &\mapsto \begin{cases} a & \text{falls } a = b \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^3 &\rightarrow \mathbb{N} \\ (i,a,b) &\mapsto |a-i| + |b-i| \\ & \quad add(\ absdiff(a,i)\ ,\ absdiff(b,i)\ ) \end{aligned}$$

Bemerkung: $absdiff(a,b)$ berechnet zwar eq und ist μ-rekursiv, hat aber nicht die geforderte Form für h.

Richtig wäre dagegen z.B. $absdiff(sub(add(a,i), add(b,i))) = |(a+i)-(b+i)|$, wobei dann $eq(a,b) = 0$ für $a = b$ (und nicht a).

Aufgabe 9-2 primitive Rekursion

Geben Sie folgende Funktionen entsprechend des Schemas für primitive Rekursion an.

Dabei ist $k_c(x_1, \ \dots \ , x_k) = c$ *die konstante Funktion.*

a)

$$\begin{aligned} add : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n, x) &\mapsto n + x \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} add(0, x) &= g(x) = \Pi_1^1(x) \\ add(s(n), x) &= h(add(n, x), n, x) \\ & \quad h(a, b, c) = s(\Pi_1^3(a, b, c)) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} decr : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} n - 1 & \text{wenn n} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} decr(0) &= g() = k_0() \\ decr(s(n)) &= h(decr(n), n) \\ & \quad h(a, b) = \Pi_2^2(a, b) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} sub : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (n, x) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x > n \\ n - x & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

Intuitiver Ansatz:

$$sub(0, x) = 0$$
$$sub(s(n), x) = s(sub(n, x)) \text{ Denn } n + 1 - x = (n - x) + 1$$

Das schlägt aber fehl: Berechne $sub(2, 1)$ nach dieser Definition:

$$sub(2, 1) = s(sub(1, 1)) = s(s(sub(0, 1))) = s(s(0)) = 2$$

Problem: $\dot{-}$ ist nicht kommutativ, $n + 1 - x \neq (n - x) + 1$!
Andere Lösung:

$$
\begin{aligned}
sub(y, x) &= sub^{-}(\Pi^2_2(y, x), \Pi^2_1(y, x)) \\
sub^{-}(0, x) &= g(x) = \Pi^1_1(x) \\
sub^{-}(s(n), x) &= h(sub^{-}(n, x), n, x) \\
& h(a, b, c) = decr(\Pi^3_1(a, b, c))
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
sg : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
n &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag:

$$
\begin{aligned}
sg(0) &= g() = k_0() \\
sg(s(n)) &= h(sg(n), n) \\
& h(a, b) = k_1(a, b)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Funktion $\overline{sg}$ geht genauso, nur sind die Konstanten 1 und 0 vertauscht.

e)

$$
\begin{aligned}
if : \mathbb{N}^3 &\to \mathbb{N} \\
(z, x, y) &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls } z \geq 1 \\ y & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag:

$$
\begin{aligned}
if(0, x, y) &= g(x, y) = \Pi^2_2(x, y) \\
if(s(z), x, y) &= h(if(z, x, y), z, x, y) \\
& h(a, b, c, d) = \Pi^4_3(a, b, c, d)
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
absdiff : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\
(x, y) &\mapsto |x - y|
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag:

$$
absdiff(x, y) = if(sub(x, y), sub(x, y), sub(y, x))
$$

Alternativ:

$$
absdiff(x, y) = add(sub(x, y), sub(y, x))
$$