Formale Sprachen und Komplexität, SS 18,
Prof. Dr. Volker Heun

Übungsblatt 1

Abgabe: bis Mo. 23.04.2018 8 Uhr

Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Übungsblatt 1

Abgabe: bis Mo. 23.04.2018 8 Uhr

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

	Check
Die Definitionen von L^+, KL, und L^* für Sprachen K und L kennen, und auf Beispiele anwenden können.	
Die Definitionen von R^+, R^* für Relationen R kennen, und auf Beispiele anwenden können.	
Relationen mit einfachen Eigenschaften auf $\mathbb{N}_0$ angeben können.	
Den Index einer Relation kennen und bestimmen können.	

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

Aufgabe 1-1 schriftlich bearbeiten
Formale Sprachen

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $L = \{ab, bc\}$, also eine formale Sprache über dem Alphabet Σ. Tragen Sie in die folgende Tabelle ein, ob jeweils $\in$ oder $\notin$ gilt.

	L	L^+	L^*	$L^*\{c\}^+$
ε				
ab				
abc				
$bcab$				
$bcabbc$				

Lösungsvorschlag:

	L	L^+	L^*	$L^*\{c\}^+$
ε	$\notin$	$\notin$	$\in\ (L^0)$	$\notin$
ab	$\in$	$\in\ (L^1)$	$\in\ (L^1)$	$\notin$
abc	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in\ (L^1\{c\}^1)$
$bcab$	$\notin$	$\in\ (L^2)$	$\in\ (L^2)$	$\notin$
$bcabbc$	$\notin$	$\in\ (L^3)$	$\in\ (L^3)$	$\notin$

Aufgabe 1-2 schriftlich bearbeiten
Relationen

Hinweis: Eine Definition von R^* und R^+ finden Sie unter `https://de.wikipedia.org/wiki/Transitive_Hülle_(Relation)`, oder in den Mathematischen Grundlagen in "Theoretische Informatik - kurz gefasst".

Sei R die binäre Relation auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit $R = \{(n, 2 \cdot n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tragen Sie in die folgende Tabelle ein, ob jeweils $\in$ oder $\notin$ gilt.

	R	R^+	R^*
$(3,3)$			
$(3,6)$			
$(3,18)$			
$(3,24)$			

Lösungsvorschlag:

Die Notationen $(x, y) \in R$ und $x\, R\, y$ bedeuten das selbe.

Für die Aufgabe ist relevant, dass gilt: $3\, R\, 6$, $6\, R\, 12$, $12\, R\, 24$.

	R	R^+	R^*
$(3,3)$	$\notin$	$\notin$	$\in$ (R^0)
$(3,6)$	$\in$	$\in$ (R^1)	$\in$ (R^1)
$(3,18)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$(3,24)$	$\notin$	$\in$ (R^3)	$\in$ (R^3)

Aufgabe 1-3 Formale Sprachen und *-Operator

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache. Zeigen Sie:

a) $L^*L^* = L^*$.

Lösungsvorschlag:

„$\supseteq$“:

Annahme: $w \in L^*$

zu zeigen: $w \in L^*L^*$

Es gilt $\varepsilon \in L^*$ und $w \in L^*$ und $w = \varepsilon w$, also $w \in L^*L^*$.

„$\subseteq$“:

Annahme: $w \in L^*L^*$

zu zeigen: $w \in L^*$

$w \in L^*L^*$ bedeutet nach Definition: es gibt Wörter $u \in L^*$ und $v \in L^*$ mit $w = uv$.
Wegen $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ gibt es $j \in \mathbb{N}$ mit $u \in L^j$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $v \in L^k$.

Also ist $w = uv \in L^j L^k = L^{j+k} \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i = L^*$.

b) $(L^*)^* = L^*$.

Lösungsvorschlag:

„$\supseteq$“:

zu zeigen: $L^* \subseteq (L^*)^*$

Es gilt $L^* = (L^*)^1 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L^*)^i = (L^*)^*$.

„$\subseteq$“:

zu zeigen: $(L^*)^* \subseteq L^*$

Wegen $(L^*)^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (L^*)^i$ reicht es, zu zeigen, dass $\forall i \in \mathbb{N}$ gilt $(L^*)^i \subseteq L^*$.

Das zeigen wir durch vollständige Induktion über i.

Induktionsbasis $i = 0$:

Es gilt $(L^*)^0 = \{\varepsilon\} \subseteq L^*$.

Induktionsschritt $i \to i + 1$:

Induktionsannahme: $(L^*)^i \subseteq L^*$.

zu zeigen: $(L^*)^{i+1} \subseteq L^*$.

Es gilt $(L^*)^{i+1} = L^*(L^*)^i \subseteq L^*(L^*)^1 = L^*L^*$ nach Induktionsannahme.

Wie in der vorigen Teilaufgabe gezeigt, ist die letzte Menge gleich L^*.

Aufgabe 1-4 Relationen und $^+$-Operator

a) Geben Sie eine Relation R auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen an, so dass $R^+ \neq R$ und R^+ die $<$-Relation auf $\mathbb{N}$ ist.

Lösungsvorschlag:

$R = \{\ (n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\ \}$

Denn dann gilt:

$$
\begin{array}{rcllllll}
R^1 & = & \{ & (0,1), & (1,2), & (2,3), & (3,4), & (4,5), \dots \} \\
R^2 & = & \{ & & (0,2), & (1,3), & (2,4), & (3,5), \dots \} \\
R^3 & = & \{ & & & (0,3), & (1,4), & (2,5), \dots \} \\
R^4 & = & \{ & & & & (0,4), & (1,5), \dots \} \\
\dots & = & \{ & & & & & \dots \}
\end{array}
$$

Ein anderer Lösungsansatz beruht auf folgender Beobachtung:
Wenn R die $<$-Relation auf $\mathbb{N}$ ist, ist auch R^+ die $<$-Relation auf $\mathbb{N}$, aber die Bedingung $R^+ \neq R$ ist verletzt.
Also nimmt man einfach ein Tupel heraus und definiert:

$R = \{\ (n, m) \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n < m\ \} \setminus \{(1,3)\}$

Man hat sehr viel Spielraum, welches Tupel man herausnimmt, jedes Tupel, dessen Zahlen mindestens den Abstand 2 haben, ist geeignet.

Tupel der Form $(n, n+1)$ würden durch den Operator $^+$ nicht wieder hinzukommen.

b) Welche Relation ist R^* für das von Ihnen definierte R?

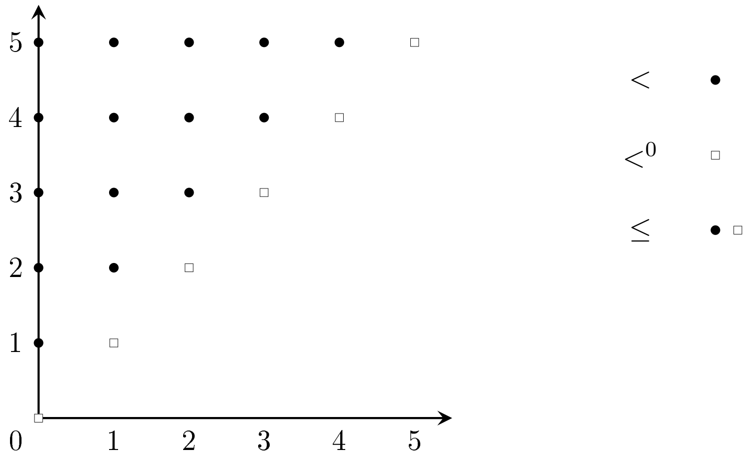
Lösungsvorschlag:

Die $\leq$-Relation auf $\mathbb{N}$.

Das hängt nur davon ab, dass R^+ die $<$-Relation auf $\mathbb{N}$ ist,
nicht davon, wie man R definiert hat.

Hinweis:
Relation als Tupelmenge erlaubt auch Mengenoperationen.
Es gilt $\quad \leq \; = \; < \; \cup \; <^0$

Hinweis:
Tupel als Koordinaten interpretierbar, damit geometrische Veranschaulichung



Aufgabe 1-5 Äquivalenzrelationen

Gegeben sei für jedes $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Relation

$$R_m \quad = \quad \{ \ (i,j) \ \mid \ i \in \mathbb{Z}, \ \ j \in \mathbb{Z}, \ \ i - j \text{ ist durch } m \text{ teilbar } \} \quad \subseteq \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

a) Zeigen Sie, dass R_m eine Äquivalenzrelation ist.

Lösungsvorschlag:

Zu zeigen: R_m ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Reflexivität:
$i - i = 0$ ist teilbar durch m, also gilt $(i, i) \in R_m$.

Symmetrie:
Wenn $(i, j) \in R_m$, dann ist $i - j$ teilbar durch m.
Damit ist auch $-(i - j) = j - i$ teilbar durch m.
Also gilt $(j, i) \in R_m$.

Transitivität:
Wenn $(i, j) \in R_m$ und $(j, k) \in R_m$, dann sind $i - j$ und $j - k$ teilbar durch m.
Damit ist auch $(i - j) + (j - k) = i - k$ teilbar durch m.
Also gilt $(i, k) \in R_m$.

b) Geben Sie die Äquivalenzklassen und den Index von R_m an.

Lösungsvorschlag:

Zunächst am Beispiel:

R_2 hat 2 Äquivalenzklassen:

$$\{\ldots, \ -4, \ -2, \ \mathbf{0}, \ 2, \ 4, \ \ldots\} \qquad \{\ldots, \ -3, \ -1, \ \mathbf{1}, \ 3, \ 5, \ \ldots\}$$

R_6 hat 6 Äquivalenzklassen:

$$\begin{array}{ll}
\{\ldots, \ -12, \ -6, \ \mathbf{0}, \ 6, \ 12, \ \ldots\} & \{\ldots, \ -11, \ -5, \ \mathbf{1}, \ 7, \ 13, \ \ldots\} \\
\{\ldots, \ -10, \ -4, \ \mathbf{2}, \ 8, \ 14, \ \ldots\} & \{\ldots, \ -9, \ -3, \ \mathbf{3}, \ 9, \ 15, \ \ldots\} \\
\{\ldots, \ -8, \ -2, \ \mathbf{4}, \ 10, \ 16, \ \ldots\} & \{\ldots, \ -7, \ -1, \ \mathbf{5}, \ 11, \ 17, \ \ldots\}
\end{array}$$

R_6 ist eine **Verfeinerung** von R_2. Es gilt $R_6 \subseteq R_2$ und $\text{Index}(R_6) \geq \text{Index}(R_2)$.

Allgemein: Die Äquivalenzklassen von R_m sind:

$$\begin{array}{llllllll}
\{\ldots, & -2m, & -m, & \mathbf{0}, & m, & 2m, & \ldots\} \\
\{\ldots, & -2m+1, & -m+1, & \mathbf{1}, & m+1, & 2m+1, & \ldots\} \\
 & & & \vdots & & & \\
\{\ldots, & -m-1, & -1, & \mathbf{m-1}, & 2m-1, & 3m-1, & \ldots\}
\end{array}$$

Es gibt insgesamt m Äquivalenzklassen, also hat R_m den Index m.

Zwischen den Relationen R_m besteht die folgende Beziehung:
ist m' ein Vielfaches von m, dann ist $R_{m'}$ eine Verfeinerung von R_m,
also $R_{m'} \subseteq R_m$ und $\text{Index}(R_{m'}) \geq \text{Index}(R_m)$.

Aufgabe 1-6 schriftlich bearbeiten
Grammatiken

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik mit $V = \{S\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$ und
$P = \{\ S \to b,\quad S \to aS\ \}$.
Die Relation $\Rightarrow_G$ ist wie in der Vorlesung definiert: Für $u, v \in (\Sigma \cup V)^*$ gilt $u \Rightarrow_G v$ genau dann wenn v aus u in einem Schritt mit Produktionen aus P ableitbar ist.

a) Geben Sie einige Paare (u, v) aus der Relation $\Rightarrow_G$ an.

Lösungsvorschlag:

Hinweis: Definition S. 5

$S \Rightarrow_G b$	$S \Rightarrow_G aS$	(denn $\to\ \subseteq\ \Rightarrow$)
$aaS \Rightarrow_G aab$	$aaS \Rightarrow_G aaaS$	(linke Seite jeweils aus S ableitbar)
$abS \Rightarrow_G abb$	$abS \Rightarrow_G abaS$	(linke Seite jeweils aus S nicht ableitbar)
$bSbSb \Rightarrow_G bbbSb$	$bSbSb \Rightarrow_G baSbSb$	(jeweils mehrere Vorkommen von
$bSbSb \Rightarrow_G bSbbb$	$bSbSb \Rightarrow_G bSbaSb$	linken Seiten von $\to$)

b) Geben Sie einige Paare (u, v) aus der Relation $\Rightarrow_G^*$ an.

Lösungsvorschlag:

alle obigen Paare			(denn $\Rightarrow^1\ \subseteq\ \Rightarrow^*$)
$\varepsilon \Rightarrow_G^* \varepsilon$	$aab \Rightarrow_G^* aab$	$bSbSb \Rightarrow_G^* bSbSb$	(denn $\Rightarrow^0\ \subseteq\ \Rightarrow^*$)
$aaS \Rightarrow_G^* aaab$	$aaS \Rightarrow_G^* aaaaS$		(denn $\Rightarrow^2\ \subseteq\ \Rightarrow^*$)
$bSbSb \Rightarrow_G^* bbbbb$	$bSbSb \Rightarrow_G^* baSbbb$		(denn $\Rightarrow^2\ \subseteq\ \Rightarrow^*$)
$aaS \Rightarrow_G^* aaaab$	$bSbSb \Rightarrow_G^* baaSbbb$		(denn $\Rightarrow^3\ \subseteq\ \Rightarrow^*$)

c) Geben Sie $\{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$ an.

Lösungsvorschlag:

Vorüberlegung:

Gefragt ist, was aus S ableitbar ist. Produktionen systematisch anwenden:

$$\begin{array}{ccccccccc}
S & \Rightarrow & aS & \Rightarrow & aaS & \Rightarrow & aaaS & \Rightarrow & \dots \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
b & & ab & & aab & & aaab & & \dots
\end{array}$$

Behauptung: $\{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \Rightarrow_G^* w\} \ = \ \{a\}^*\{S, b\}$

Zum Beweis betrachtet man wie üblich die beiden Richtungen „$\subseteq$" und „$\supseteq$".

Fall „$\subseteq$": man zeigt durch vollständige Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
wenn $S \Rightarrow_G^n w$ dann $w \in \{a\}^*\{S, b\}$.

Fall „$\supseteq$": man zeigt durch vollständige Induktion über k, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:
wenn $w \in \{a\}^k\{S, b\}$ dann $S \Rightarrow_G^* w$.

d) Geben Sie $L(G)$ an.

Lösungsvorschlag:

Hinweis: Definition S. 6

Nach Definition ist $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$

Ausgehend vom vorigen Ergebnis bekommt man diese Menge,
indem man einfach alle Wörter weglässt, die Variablen enthalten:
$L(G) = \{a\}^*\{b\}$.

Andere Schreibweise dieser Menge: $\{\ a^n b \mid n \in \mathbb{N}\ \}$