Formale Sprachen und Komplexität, SS 18, Prof. Dr. Volker Heun

Übungsblatt 5

Abgabe: bis Fr. 04.06.2018 8 Uhr

Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Übungsblatt 5

Abgabe: bis Fr. 04.06.2018 8 Uhr

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

	Check
Mit dem Index der Äquivalenzrelation R_L umgehen können.	
Eine kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform überführen können.	
Die Konfigurationen eines Kellerautomaten zu einem Eingabewort bestimmen können.	
Die akzeptierte Sprache eines Kellerautomaten bestimmen können.	
Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen kennen.	
Mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen kontrapositiv Beweise führen können.	

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

Aufgabe 5-1 Äquivalenzrelation R_L

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 10\}$.

Zeige, dass $Index(R_L) = 3$ gilt, ohne die Äquivalenzklassen von R_L anzugeben.

Aufgabe 5-2 schriftlich bearbeiten
Chomsky-Normalform

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik mit $V = \{S, P, Q, R, T, U, X, Y\}$ und $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$
\begin{array}{lllll}
P = \{ & S \to PQT, & P \to bQ, & Q \to aRY, & \\
& R \to T, & & T \to U, & \\
& U \to aU, & U \to bX, & & \\
& X \to Y, & Y \to X, & Y \to SX & Y \to c \quad \}
\end{array}
$$

Welche Sprache $L(G)$ dadurch definiert wird, ist für die Aufgabe unwichtig. Konstruieren Sie nach dem Verfahren im Buch eine Grammatik G' in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 5-3 schriftlich bearbeiten
CYK-Algorithmus

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ die Grammatik mit $V = \{S, A, B, C, D, E\}$ und $\Sigma = \{a, b\}$ und

$$
\begin{array}{llll}
P = \{ & S \to AB, & S \to BC, & S \to BE, & \\
& A \to BA, & & & A \to a, \\
& B \to AD, & B \to EE, & & B \to b, \\
& C \to AB, & & & \\
& D \to BC, & & & \\
& & & & E \to a \quad \}
\end{array}
$$

Bestimmen Sie mit Hilfe des Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK), ob folgende Wörter zu $L(G)$ gehören:

a) *abbaba*

b) *aaaab*

Aufgabe 5-4 schriftlich bearbeiten
Kellerautomaten

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z, \#)$ mit $Z = \{z, z'\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{A, B, \#\}$

$$
\delta : \left|
\begin{array}{ll|ll|ll|ll}
1: & z,\# \xrightarrow{a} z,\, A\# & 4: & z,\# \xrightarrow{b} z,\, B\# & 7: & z,\, A \xrightarrow{\varepsilon} z',\, A & 9: & z',\, A \xrightarrow{\varepsilon} z',\, \varepsilon \\
2: & z,\, A \xrightarrow{a} z,\, AA & 5: & z,\, B \xrightarrow{b} z,\, BB & 8: & z,\, B \xrightarrow{\varepsilon} z',\, B & 10: & z',\, B \xrightarrow{\varepsilon} z',\, \varepsilon \\
3: & z,\, B \xrightarrow{a} z,\, \varepsilon & 6: & z,\, A \xrightarrow{b} z,\, \varepsilon & & & 11: & z',\, \# \xrightarrow{\varepsilon} z',\, \varepsilon
\end{array}\right.
$$

Die Nummern sind nicht Teil des Formalismus. Sie sollen nur erleichtern, in kompakter Form über die Übergänge zu sprechen. Die Spezifikation von δ verwendet hier
nicht die Langnotation: $\delta(z, c, X) \ni (z', X'_1 \cdots X'_k)$ aus dem Buch,
sondern die Kurznotation: $z,\, X \xrightarrow{c} z',\, X'_1 \cdots X'_k$

Dieser Kellerautomat akzeptiert durch leeren Keller und leeres Wort.

a) Geben Sie für jedes der folgenden Eingabewörter den Baum aller Konfigurationen an, die M mit dem Eingabewort erreicht: a, b, ab, bba, $bbaa$.

b) Geben Sie die Sprache $N(M)$ an, die der Kellerautomat M akzeptiert.

Aufgabe 5-5 Pumping-Lemma (kontextfrei)

Beweisen oder widerlegen Sie: folgende formale Sprachen sind vom Typ 2 (kontextfrei).

a) $L = \{\ a^i b^k c^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < i < k \text{ und } 0 < j < k\ \}$.

Jedes Wort der Sprache enthält also mindestens ein a am Anfang, mindestens ein c am Ende, und die Anzahl von a's und von c's ist voneinander unabhängig. Die Anzahl der b's dazwischen ist größer als jede der anderen beiden Anzahlen.

b) $L' = \{\ a^i b^k c^j \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } 0 < i \text{ und } 0 < j \text{ und } i + j < k\ \}$.

Jedes Wort der Sprache enthält also mindestens ein a am Anfang, mindestens ein c am Ende, und die Anzahl von a's und von c's ist voneinander unabhängig. Die Anzahl der b's dazwischen ist größer als die Summe der anderen beiden Anzahlen.