Formale Sprachen und Komplexität, SS 18,
Prof. Dr. Volker Heun

Übungsblatt 10

Abgabe: bis Mo 09.07.2018 8 Uhr

Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Übungsblatt 10

Abgabe: bis Mo 09.07.2018 8 Uhr

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

	Check
Gut mit den Begriffen *entscheidbar* und *semi-entscheidbar* umgehen können.	
Mit der Reduktion von formalen Sprachen argumentieren können.	

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

Aufgabe 10-1 schriftlich bearbeiten
Reduktion von formalen Sprachen: Eine Trockenübung II

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; |w|_a = |w|_b \right\}$. Sei $\Gamma = \{c, d, e\}$ und $C = \left\{ c^n d^n e^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$.

a) Zeigen Sie, dass A auf C reduzierbar ist, das heißt $A \leq C$.

b) Es gibt ein Entscheidungsverfahren für C (etwa eine kleine Modifikation einer früher behandelten Turingmaschine). Was folgt daraus für die (Semi-)Entscheidbarkeit von A?

   Bemerkung: *Das Ergebnis bringt natürlich keinen großen Erkenntnisgewinn über diese beiden entscheidbaren Sprachen. Zweck der Aufgabe ist es, die Technik der Reduktion an einem einfachen Beispiel zu illustrieren.*

Aufgabe 10-2 (semi-)entscheidbar

Sei Σ ein Alphabet und sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine formale Sprache.

a) A ist semi-entscheidbar gdw. *Bedingung*
   Geben Sie möglichst viele Bedingungen an, für die das stimmt.

b) A ist entscheidbar gdw. *Bedingung*
   Geben Sie möglichst viele Bedingungen an, für die das stimmt.

Aufgabe 10-3 a), b), c) und h) schriftlich bearbeiten
Post'sches Korrespondenzproblem

Jede der Teilaufgaben a) bis g) behandelt eine Instanz des Post'schen Korrespondenzproblems. Geben Sie zu jeder Instanz entweder eine Lösung an oder einen Beweis, dass keine Lösung existiert.

a) **schriftlich bearbeiten**
$x_1 = b \quad x_2 = ba \quad x_3 = ab$
$y_1 = ab \quad y_2 = abb \quad y_3 = abb$

b) **schriftlich bearbeiten**
$x_1 = ca \quad x_2 = b \quad x_3 = aba$
$y_1 = bac \quad y_2 = ab \quad y_3 = a$

c) **schriftlich bearbeiten**
$x_1 = bab \quad x_2 = ba \quad x_3 = ab$
$y_1 = bb \quad y_2 = abb \quad y_3 = ba$

d) $x_1 = aaaaa \quad x_2 = aa$
$y_1 = a \quad y_2 = aaaaa$

e) $x_1 = abc \quad x_2 = abba \quad x_3 = c \quad x_4 = bbba \quad x_5 = abcc$
$y_1 = ab \quad y_2 = aabb \quad y_3 = ccc \quad y_4 = cbbb \quad y_5 = aab$

f) $x_1 = ba \quad x_2 = abb \quad x_3 = bab$
$y_1 = bab \quad y_2 = bb \quad y_3 = abb$

g) $x_1 = b \quad x_2 = a \quad x_3 = ca \quad x_4 = abc$
$y_1 = ca \quad y_2 = ab \quad y_3 = a \quad y_4 = c$

h) **schriftlich bearbeiten**.
In den Fällen, in denen keine Lösung existiert, kann man die Unlösbarkeit also beweisen. Andererseits ist bewiesen, dass das Post'sche Korrespondenzproblem nicht entscheidbar ist. Warum ist das kein Widerspruch?

Aufgabe 10-4 **Modifiziertes Post'sches Korrespondenzproblem**

Über einem beliebigen Alphabet Σ sind das Postsche Korrespondenzproblem und das Modifizierte Postsche Korrespondenzproblem gegeben durch:

PCP : $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) | \exists i_1, i_2 \ldots i_n \in \{1, 2, \ldots, k\} : x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} = y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots y_{i_n}\}$

MPCP : $\{((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) | \exists i_2, i_3 \ldots i_n \in \{1, 2, \ldots, k\} : x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} = y_1, y_{i_2}, \ldots y_{i_n}\}$

Zeigen Sie: $MPCP \leq PCP$.

Tipp: Die vermittelnde Funktion zwischen $MPCP$ und PCP ist gegeben durch:

$$\begin{array}{lll} F: ((\Sigma^*)^2)^k & \rightarrow & ((\Sigma^*)^2)^{k+2} \\ \quad ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)) & \mapsto & ((\bar{x_1}, \grave{y_1}), (\acute{x_1}, \grave{y_1})(\acute{x_2}, \grave{y_2}), \ldots, (\acute{x_k}, \grave{y_k}), (\$, \#\$)) \end{array}$$

Wobei # und $ Zeichen sind die nicht in Σ vorkommen, und für ein Wort $\omega = a_1 \ldots a_n$ $\bar{\omega}$ $\grave{\omega}$ $\acute{\omega}$ gegeben sind durch:

$$\bar{\omega} = \#a_1\#a_2 \ldots \#a_n\#, \quad \acute{\omega} = a_1\#a_2 \ldots \#a_n\#, \quad \grave{\omega} = \#a_1\#a_2 \ldots \#a_n$$