Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Volker Heun

Wintersemester 2019/20
Übungsblatt 12
23. Januar 2020

Algorithmische Bioinformatik II

Abgabetermin: Freitag, den 31. Januar, 12⁰⁰

Tutoraufgabe 1 (Vorbereitung bis zum 29.01.20)

Sei $Z_n \in [1:6]$ eine Zufallsvariable, die dem Ausgang des n-ten Wurf eines Würfels entspricht (wobei alle sechs Ausgänge gleichwahrscheinlich sind). Betrachte

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) \bmod 4.$$

a) Zeige, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markov-Kette ist.

b) Bestimme das zugehörige Markov-Modell (Q, P, π).

c) Bestimme die stationäre Verteilung.

Aufgabe (Notenbonus) 2

Betrachte das folgende Modell $M(\theta)$ mit

$$\theta \in \Theta = \{(p_1, \ldots, p_4) \,:\, p_i \in [0,1] \wedge p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \wedge p_1 + p_2 = p_3 + p_4\}$$

für das Werfen eines Tetraeders, wobei bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit p_i die Seitenfläche i unten liegt. Weiter sei die Wahrscheinlichkeit für die Seitenflächen 1 und 2 genau so groß wie für 3 und 4.

Angenommen, der Tetraeder wurde N-mal geworfen und dabei kam die Seite i genau N_i-mal unten zu liegen. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $\theta^*_{ML} \in \Theta$ und den Maximum-A-Posteriori-Schätzer $\theta^*_{MAP} \in \Theta$ für den Prior $f_0(p_1, p_2, p_3, p_4) = 64 \cdot p_1 \cdot p_3$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe (Notenbonus) 3

Wirf einen echten Würfel so oft, bis er sechs Augen anzeigt und notiere diese Anzahl als N.

Erinnerung: diese Anzahl ist geometrisch zum Parameter p verteilt, d.h.

$$\mathrm{Ws}[X = N] = (1-p)^{N-1} \cdot p.$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit ist, dass mit dem Würfel eine Sechs gewürfelt wird.

a) Überprüfe mittels eines einfachen Hypothesen-Tests, ob $p = 1/6$ gilt für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$. Für die Alternativ-Hypothese sei $p < 1/6$.

b) Überprüfe mit Hilfe des Likelihood-Ratio-Tests die Null-Hypothese ($p = 1/6$) gegen die Alternativ-Hypothese ($p = 1/7$) für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$.

c) Überprüfe mit Hilfe des Likelihood-Ratio-Tests die Null-Hypothese ($p = 1/7$) gegen die Alternativ-Hypothese ($p = 1/6$) für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$.