
Algorithmische Bioinformatik II

Abgabetermin: Freitag, den 23. Januar, 9⁰⁰ Uhr in Moodle

Hausaufgabe 1

Wirf einen echten Würfel so oft, bis er sechs Augen anzeigt und notiere diese Anzahl als N .

Erinnerung: diese Anzahl ist geometrisch zum Parameter p verteilt, d.h.

$$\text{Ws}[X = N] = (1 - p)^{N-1} \cdot p.$$

wobei p die Wahrscheinlichkeit ist, dass mit dem Würfel eine Sechs gewürfelt wird.

- Überprüfe mittels eines einfachen Hypothesen-Tests, ob $p = 1/6$ gilt für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$. Für die Alternativ-Hypothese sei $p < 1/6$.
- Überprüfe mit Hilfe des Likelihood-Ratio-Tests die Null-Hypothese ($p = 1/6$) gegen die Alternativ-Hypothese ($p = 1/7$) für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$.
- Überprüfe mit Hilfe des Likelihood-Ratio-Tests die Null-Hypothese ($p = 1/7$) gegen die Alternativ-Hypothese ($p = 1/6$) für das Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.05$.

Hausaufgabe 2

Betrachte das folgende Modell $M(\theta)$ mit

$$\theta \in \Theta = \{(p_1, \dots, p_4) : p_i \in [0, 1] \wedge p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \wedge p_1 + p_2 = p_3 + p_4\}$$

für das Werfen eines Tetraeders, wobei bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit p_i die Seitenfläche i unten liegt. Weiter sei die Wahrscheinlichkeit für die Seitenflächen 1 und 2 genau so groß wie für 3 und 4.

Angenommen, der Tetraeder wurde N -mal geworfen und dabei kam die Seite i genau N_i -mal unten zu liegen. Bestimme den Maximum-Likelihood-Schätzer $\theta_{ML}^* \in \Theta$ und den Maximum-A-Posteriori-Schätzer $\theta_{MAP}^* \in \Theta$ für den Prior $f_0(p_1, p_2, p_3, p_4) = 64 \cdot p_1 \cdot p_3$.

Tutoraufgabe 3 (Vorbereitung bis zum 21.01.26)

Sei $Z_n \in [1 : 6]$ eine Zufallsvariable, die dem Ausgang des n -ten Wurf eines Würfels entspricht (wobei alle sechs Ausgänge gleichwahrscheinlich sind). Betrachte

$$X_n = \left(\sum_{i=1}^n Z_i \right) \bmod 4.$$

- Zeige, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markov-Kette ist.
- Bestimme das zugehörige Markov-Modell (Q, P, π) .
- Bestimme die stationäre Verteilung.